3. Proprietà dei triangoli isosceli

Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti

Ora che abbiamo introdotto i primi due criteri di congruenza, siamo in grado di dimostrare alcune proprietà del triangolo isoscele che certamente già conosci dai tuoi studi precedenti. Cominciamo con il ricordare che, in un triangolo isoscele, i due lati congruenti si chiamano **lati obliqui** e il lato rimanente si dice **base** del triangolo (**fig. 16.13**). Quando ci si riferisce a un triangolo isoscele occorre specificare qual è la base: per esempio, per specificare che un triangolo isoscele ABC ha come base AB, si usa l'espressione «triangolo ABC, isoscele sulla base AB».

I due angoli adiacenti alla base di un triangolo isoscele si dicono **angoli alla base** e il terzo angolo si dice **angolo al vertice**.

Rifletti

«Isoscele» è una parola che si utilizza solo in geometria: essa deriva da «iso» che significa uguale e «scele», che significa lato.

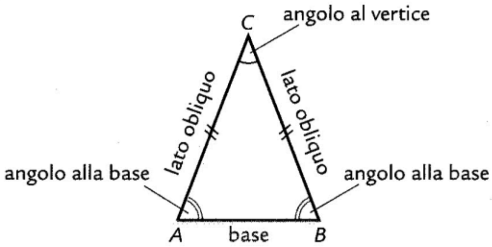


Figura 16.13

Angoli alla base di un triangolo isoscele — **TEOREMA 16.2**

Se un triangolo è **isoscele**, allora ha **due** angoli **congruenti** (quelli alla base).

IPOTESI $AC \cong BC$ (**fig. 16.14**)

TESI $C\widehat{A}B \cong C\widehat{B}A$ (**fig. 16.14**)

L'idea chiave che ci consentirà di eseguire la dimostrazione è di effettuare una semplice *costruzione preliminare*. La costruzione preliminare è una tecnica che utilizzeremo di frequente per effettuare dimostrazioni e consiste nel tracciare un segmento, una retta o un'altra figura opportuna nel disegno che costituisce il modello geometrico di un teorema, per consentire la dimostrazione successiva.

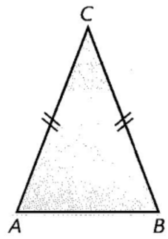


Figura 16.14

DIMOSTRAZIONE

COSTRUZIONE PRELIMINARE

Tracciamo la *bisettrice* CH dell'angolo $A\widehat{C}B$ del triangolo (**fig. 16.15**).

I due triangoli AHC e BHC hanno:

- $AC \cong BC$ per ipotesi
- CH in comune
- $A\widehat{C}H \cong B\widehat{C}H$ per costruzione (CH è la *bisettrice* di $A\widehat{C}B$)

Dunque sono congruenti per il *primo criterio* di congruenza. In particolare:

$C\widehat{A}H \cong C\widehat{B}H$ perché elementi corrispondenti in triangoli congruenti

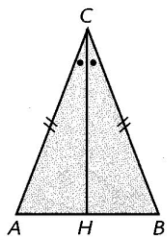


Figura 16.15

Nella dimostrazione del teorema precedente (fai riferimento ancora alla **fig. 16.15**) abbiamo dimostrato che i due triangoli AHC e BHC sono congruenti. Dalla congruenza di questi due triangoli possiamo dedurre anche che:

- $AH \cong HB$
  Di conseguenza, la *bisettrice* dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è anche *mediana* relativa alla base.
- $A\widehat{H}C \cong B\widehat{H}C$, quindi gli angoli $A\widehat{H}C$ e $B\widehat{H}C$, supplementari perché A, H e B sono allineati, sono retti.
  Di conseguenza, la *bisettrice* dell'angolo al vertice di un triangolo isoscele è anche *altezza* relativa alla base.

PDF

Approfondimento

È proprio necessaria la «dimostrazione»?

Riassumiamo queste considerazioni nel seguente teorema.

TEOREMA 16.3 **Proprietà del triangolo isoscele**

In un triangolo isoscele la **bisettrice** dell'angolo al vertice è anche **mediana** e **altezza** relativa alla base.

Il teorema inverso

Il **teorema 16.2** è espresso dalla proposizione:

«Se un triangolo è isoscele, allora ha due angoli congruenti» [16.1]

cioè da un'implicazione del tipo:

«se p, allora q»

Come sai, si chiama **inversa** di un'implicazione del tipo «se p, allora q» la proposizione «se q, allora p». Quindi la proposizione inversa della **[16.1]** è:

«Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele»

Sempre in logica abbiamo osservato che , se una proposizione è vera, non è detto che la sua inversa sia vera.

ESEMPIO

Proposizione:
«Se siamo in Calabria, allora siamo nell'Italia meridionale» **VERA**

Proposizione inversa:
«Se siamo nell'Italia meridionale, allora siamo in Calabria» **FALSA**

Di conseguenza, in generale, se un teorema è vero, **non** è detto che valga il teorema inverso. Nel caso del **teorema 16.2**, tuttavia, vale anche il teorema inverso.

TEOREMA 16.4 **Inverso del teorema 16.2**

Se un triangolo ha **due angoli congruenti**, allora è **isoscele**.

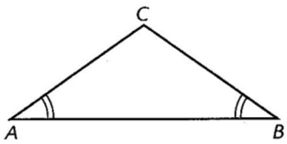


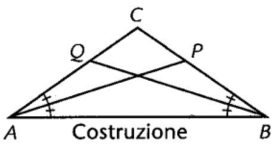
Figura 16.16

IPOTESI $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ **(fig. 16.16)** **TESI** $AC \cong BC$ **(fig. 16.16)**

La dimostrazione è piuttosto articolata. Effettueremo anzitutto una costruzione preliminare, tracciando le bisettrici degli angoli alla base del triangolo. Grazie a questa costruzione riusciremo a «immergere» i due lati AC e BC in due opportuni triangoli di cui riusciremo a provare la congruenza: di qui dedurremo la tesi.
Se osservi la sequenza delle figure nel colonnino e le relative didascalie, dovresti riuscire a scoprire da solo la dimostrazione, prima di leggerla.

DIMOSTRAZIONE

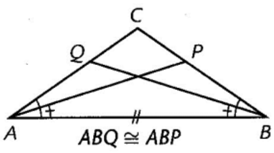
COSTRUZIONE PRELIMINARE



Costruzione

Tracciamo le *bisettrici AP* e *BQ* dei due angoli $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ del triangolo.

Analizziamo i triangoli ABQ e ABP



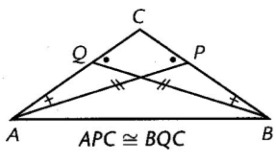
$ABQ \cong ABP$

I due triangoli ABQ e ABP hanno:
- AB in comune
- $Q\widehat{A}B \cong P\widehat{B}A$ per ipotesi
- $Q\widehat{B}A \cong P\widehat{A}B$ perché metà di angoli congruenti

Dunque sono congruenti per il *secondo criterio* di congruenza. In particolare:

$AP \cong BQ$ e $A\widehat{Q}B \cong A\widehat{P}B$

Analizziamo i triangoli APC e BQC



$APC \cong BQC$

I triangoli APC e BQC hanno:
- $AP \cong BQ$ per la dimostrazione precedente
- $C\widehat{A}P \cong C\widehat{B}Q$ perché metà di angoli congruenti
- $C\widehat{P}A \cong C\widehat{Q}B$ perché supplementari degli angoli $A\widehat{P}B$ e $A\widehat{Q}B$, congruenti per la dimostrazione precedente

Dunque sono congruenti per il *secondo criterio* di congruenza. In particolare:
$AC \cong BC$