n. 1 p. 428

$y = x^2 - 4x + 3 \qquad [-1;5]$

la funzione è continua in $[-1;5]$ e derivabile in $(-1;5)$

$f(-1) = 8 \qquad f(5) = 8$

sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle

$\exists\, c \in (-1;5) \mid f'(c) = 0$

$f'(x) = 2x - 4 \qquad f'(c) = 0 \rightarrow 2c - 4 = 0 \rightarrow c = 2$

n. 2 p. 428

$y = -x^2 + 6x \qquad [2;4]$

f è continua in $[2;4]$ e derivabile in $(2;4)$

$f(2) = 8 \qquad f(4) = 8$

$\exists\, c \in (2;4) \mid f'(c) = 0$

$f'(x) = -2x + 6 \qquad f'(c) = 0 \rightarrow -2c + 6 = 0 \rightarrow c = 3$

n. 3 p. 428

$y = x^4 + x^2 + 1$ f è continua in $[-2;2]$ e derivabile in $(-2;2)$

$f(-2) = 21 \qquad f(2) = 21 \qquad f'(x) = 4x^3 + 2x$

$\exists\, c \in (-2;2) \mid f'(c) = 0 \qquad 4c^3 + 2c = 0 \rightarrow 2c(2c^2+1) = 0 \rightarrow c = 0$

n. 4 p. 428

$y = 2x^4 - x^2 + 1$ f è continua in $[-2;2]$ e derivabili in $(-2;2)$

$y' = 8x^3 - 2x \qquad f(-2) = 29 \qquad f(2) = 29$

$\exists\, c \in (-2;2) \mid f'(c) = 0 \qquad 2c(4c^2 - 1) = 0 \rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = -\frac{1}{2},\ c_3 = +\frac{1}{2}$

n. 5 p. 428

$y = x^4 - 5x^2 + 4$ f è continua in $[-\sqrt{3};\sqrt{3}]$ e derivabile in $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$

$y' = 4x^3 - 10x \qquad f(-\sqrt{3}) = -2 \qquad f(\sqrt{3}) = -2$

$\exists\, c \in (-\sqrt{3};\sqrt{3}) \mid f'(c) = 0 \qquad 2c(2c^2 - 5) = 0$

$c_1 = 0, \quad c_2 = -\sqrt{\frac{5}{2}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}$

n. 6 p. 428

$y = \sin x$ f è continua in $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$ e derivabile in $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right)$

$y' = \cos x$ $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ $f\left(\frac{11}{6}\pi\right) = -\frac{1}{2}$

$\exists\, c \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{11}{6}\pi\right) \mid f'(c) = 0$ $\cos c = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\pi}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{2}\pi$

n. 7 p. 428

$y = \cos x + \cos 2x$ f è continua in $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ e derivabile in $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$

$y' = -\sin x - 2\sin 2x$ $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\exists\, c \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \mid f'(c) = 0$

$-\sin c - 2\sin 2c = 0$

$-\sin c - 4\sin c \cos c = 0$

$\sin c\,(1 + 4\cos c) = 0$ $c = 0$ accett.

$c = \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$ NON accettabili

n. 8 p. 428

$y = \frac{x}{x^2+4}$ f è continua in $[1;4]$ e derivabile in $(1;4)$

$y' = \frac{x^2+4-2x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}$ $f(1) = \frac{1}{5}$ $f(4) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

$\exists\, c \in (1;4) \mid f'(c) = 0$ $\frac{4-c^2}{(c^2+4)^2} = 0 \rightarrow c = \pm 2 \rightarrow$ $c_1 = 2$ accett.; $c_2 = -2$ non accett.

n. 9 p. 428

$y = \frac{x+2}{x^2+x+1}$ f è continua in $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$ e derivabile in $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$

$y' = \frac{x^2+x+1-2x^2-4x-x-2}{(x^2+x+1)^2}$ $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3} = 2$

$y' = \frac{-x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2}$ $f(0) = 2$

$\exists\, c \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \mid f'(c) = 0$ $\frac{-c^2-4c-1}{(c^2+c+1)^2} = 0$

$c^2 + 4c + 1 = 0$

$c_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} = \begin{cases} -2-\sqrt{3} \approx -3{,}732 & \text{non accett.} \\ -2+\sqrt{3} \approx -0{,}2679 & \text{accett.} \end{cases}$

n. 10 p. 428

$y = \sin x - \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$

$y' = \cos x + \sqrt{3}\sin x$

f è continua in $\left[\frac{2}{3}\pi ; \pi\right]$ e derivabile in $\left(\frac{2}{3}\pi ; \pi\right)$

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$f(\pi) = \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\exists\, c \in \left(\frac{2}{3}\pi ; \pi\right) \mid f'(c) = 0$

$\cos c + \sqrt{3}\sin c = 0$

$1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, c = 0$

$\mathrm{tg}\, c = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad c = \frac{5}{6}\pi$

n. 11 p. 428

$y = x + 2\sqrt{x(2-x)}$

$y' = 1 + \frac{2-2x}{\sqrt{x(2-x)}}$

f è continua in $\left[\frac{2}{5} ; 2\right]$ e derivabile in $\left(\frac{2}{5} ; 2\right)$

$f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5} + 2\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{2}{5} + \frac{8}{5} = 2$

$f(2) = 2$

$\exists\, c \in \left(\frac{2}{5} ; 2\right) \mid f'(c) = 0$

$1 + \frac{2-2c}{\sqrt{2c-c^2}} = 0$

$\sqrt{2c-c^2} = 2c - 2$

$\begin{cases} 1 < c < 2 \\ 2c - c^2 = 4c^2 - 8x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 < c < 2 \\ 5c^2 - 10c + 4 = 0 \end{cases}$

$c_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{5} = \begin{cases} - \quad 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} & \text{non accett.} \\ + \quad 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} & \text{accett.} \end{cases}$

n. 12 p. 428

$y = \frac{x^2+1}{2x+1}$

$y' = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 2}{(2x+1)^2}$

$y' = \frac{2x^2 + 2x - 2}{(2x+1)^2}$

f è continua in $[0 ; 2]$ e derivabile in $(0 ; 2)$

$f(0) = 1 \qquad f(2) = 1$

$\exists\, c \in (0 ; 2) \mid f'(c) = 0$

$\frac{2c^2 + 2c - 2}{(2c+1)^2} = 0$

$c^2 + c - 1 = 0$

$c_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \frac{-\sqrt{5}-1}{2} & \text{non accett.} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \text{accett.} \end{cases}$

n. 13 p. 428

$$y = \frac{1}{2x-1} + \frac{3x}{4x^2-1}$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$$

$x = -\frac{1}{2}$ punto di discontinuità di 2^a specie

Il teorema di Rolle non è applicabile

n. 14 p. 428

$$y = \sqrt{3x-x^2}$$

$$y' = \frac{3-2x}{2\sqrt{3x-x^2}}$$

f è continua in $[0;3]$ e derivabile in $(0;3)$

$f(0) = f(3) = 0$

$\exists\, c \in (0;3) \mid f'(c) = 0$

$$\frac{3-2c}{2\sqrt{3c-c^2}} = 0 \quad \to \quad c = \frac{3}{2}$$

n. 15 p. 428

$$y = 2x + |5-x| - 7 = \begin{cases} 2x+5-x-7 & \text{se } x<5 \\ 2x+x-5-7 & \text{se } x \geq 5 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{se } x<5 \\ 3x-12 & \text{se } x \geq 5 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 1 & \text{se } x<5 \\ 3 & \text{se } x>5 \end{cases}$$

f è continua in $[2;5]$ e derivabile in $(2;5)$

$f(2) = 0 \qquad f(5) = 3 \qquad f(2) \neq f(5)$

Il teorema di Rolle non è applicabile.

n. 16 p. 428

$$y = |x^2-1| = \begin{cases} 1-x^2 & \text{in } [0;1) \\ x^2-1 & \text{in } [1;\sqrt{2}] \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} -2x & \text{per } 0 \leq x < 1 \\ 2x & \text{per } 1 < x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

f è continua in $[0;\sqrt{2}]$

f non è derivabile in $x = 1$

Il teorema di Rolle non è applicabile.

n. 17 p. 429

$$y = |\log x| = \begin{cases} -\log x & \frac{1}{e} \le x < 1 \\ \log x & 1 \le x \le e \end{cases}$$

f è continua in $\left[\frac{1}{e}; e\right]$

$$y' = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \frac{1}{e} \le x < 1 \\ \frac{1}{x} & 1 < x \le e \end{cases}$$

f non è derivabile in $x = 1$

Il teorema di Rolle non è applicabile

n. 18 p. 429

$$y = |1+x| + |4x-8| = \begin{cases} -3x+9 & 1 \le x < 2 \\ 5x-7 & 2 \le x \le \frac{13}{5} \end{cases}$$

f è continua in $\left[1; \frac{13}{5}\right]$

$$y' = \begin{cases} -3 & 1 \le x < 2 \\ 5 & 2 < x \le \frac{13}{5} \end{cases}$$

f non è derivabile in $x = 2$

Il teorema di Rolle non è applicabile

n. 19 p. 429

$$y = |1+x| + |4x-8| = \begin{cases} -3x+9 & -2 \le x < 2 \\ 5x-7 & 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

f è continua in $[-2; 3]$

$$y' = \begin{cases} -3 & -2 \le x < 2 \\ 5 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

f non è derivabile in $x = 2$

Il teorema di Rolle non è applicabile

n. 20 p. 429

$$y = 2 + \sqrt{4-x^2}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$$

f è continua in $[-2; +2]$ e derivabile in $(-2; +2)$

$$f(-2) = f(2) = 2$$

$$\exists\, c \in (-2; 2) \mid f'(c) = 0$$

$$\frac{-c}{\sqrt{4-c^2}} = 0$$

$$c = 0$$

n. 21 p. 429

$y = e^{-x^2}$

$y' = -2x e^{-x^2}$

f è continua in $[-3;3]$ e derivabile in $(-3;3)$

$f(-3) = f(3) = e^{-9}$

$\exists\, c \in (-3;3) \mid f'(c) = 0$

$-2c e^{-c^2} = 0 \rightarrow c = 0$

n. 22 p. 429

$y = e^x + 2e^{-x}$

$y' = e^x - 2e^{-x}$

f è continua in $[0;\log 2]$ e derivabile in $(0;\log 2)$

$f(0) = 1 + 2 = 3$

$f(\log 2) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3$

$\exists\, c \in (0;\log 2) \mid f'(c) = 0$

$e^c - 2e^{-c} = 0$

$e^c - \frac{2}{e^c} = 0$

$e^{2c} - 2 = 0$

$e^{2c} = 2$

$2c = \log 2$

$c = \frac{1}{2}\log 2 = \log\sqrt{2}$