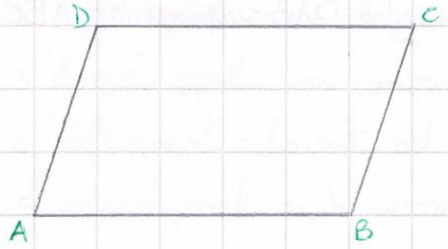
Il parallelogramma (P)

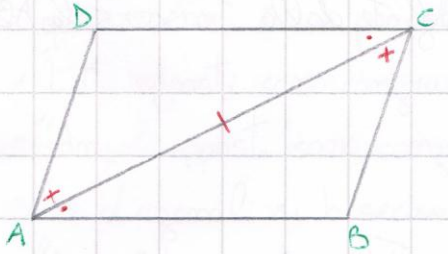
Il parallelogramma è un quadrilatero con i lati a due a due paralleli.



Hp: $AB \parallel CD$

$BC \parallel AD$

1. "Ogni diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti"



Hp: $AB \parallel CD$ Th: $A\overset{\triangle}{B}C \cong A\overset{\triangle}{C}D$

$BC \parallel AD$

Dimostrazione: Traccio la diagonale AC.

Considero i triangoli $A\overset{\triangle}{B}C$ e $A\overset{\triangle}{C}D$. Essi hanno:

1. $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ perché angoli alterni interni delle parallele AD e BC (trasversale AC)
2. AC in comune
3. $A\hat{C}B \cong C\hat{A}D$ perché angoli alterni interni delle parallele AD e BC (trasversale AC)

Dunque i due triangoli avendo un lato e gli angoli ad esso adiacenti ordinatamente congruenti sono congruenti per il secondo criterio di congruenza (ALA).

In particolare ad elementi congruenti si oppongono elementi congruenti:

1. $AB \cong CD$
2. $BC \cong AD$

} 2. "Lati opposti sono congruenti"

3. $A\hat{B}C \cong A\hat{D}C$

$B\hat{C}D \cong B\hat{A}D$

(perché somme di angoli congruenti)

} 3. "Angoli opposti sono congruenti"

4. "Gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari"

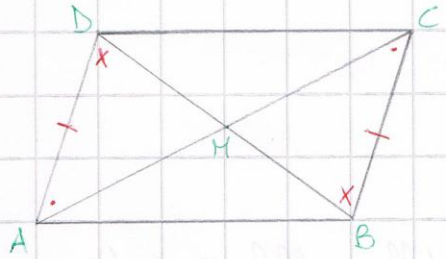
Hp: $AB \parallel CD$
$BC \parallel AD$

Th: $D\hat{A}B$ supplementare $A\hat{B}C$

Dimostrazione:

$D\hat{A}B$ supplementare $A\hat{B}C$ perché angoli coniugati interni delle rette parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AB

5. "Le diagonali si bisecano"



Hp: $AB \parallel CD$
$BC \parallel AD$
$AD \cong BC$

Th: $AM \cong CM$
$BM \cong MD$

Dimostrazione: Traccio le diagonali AC e BD.
Considero i triangoli $A\hat{M}D$ e $B\hat{M}C$. Essi hanno:

1. $A\hat{D}M \cong D\hat{B}C$ perché angoli alterni interni delle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale BD
2. $AD \cong BC$ per HP
3. $M\hat{A}D \cong M\hat{C}B$ perché angoli alterni interni delle parallele AD e BC tagliate dalla trasversale AC

Dunque i due triangoli avendo un lato e gli angoli ad esso adiacenti ordinatamente congruenti sono congruenti per il secondo criterio di congruenza (ALA). In particolare ad elementi congruenti si oppongono elementi congruenti cioè:

1. $AM \cong MC$
2. $A\hat{M}D \cong B\hat{M}C$
3. $BM \cong MD$

Proprietà del parallelogramma (condizioni necessarie)

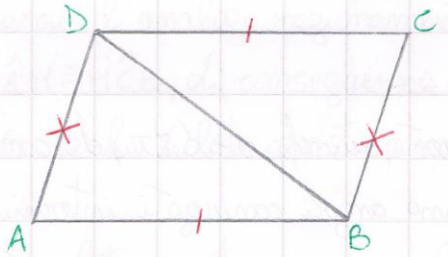
1. "Ogni diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti".
2. "Lati opposti sono congruenti".
3. "Angoli opposti sono congruenti".
4. "Gli angoli adiacenti ad ogni lato sono supplementari".
5. "Le diagonali si bisecano".

Criteri del parallelogramma (condizioni sufficienti)

Un quadrilatero è un parallelogramma se:

1. "Lati opposti sono congruenti".
2. "Angoli opposti sono congruenti".
3. "Le diagonali si bisecano".
4. "Due lati opposti sono paralleli e congruenti".

1. "Lati opposti sono congruenti".



Hp: $AB \cong DC$
$AD \cong BC$

Th: ABCD parallelogramma

Dimostrazione: Traccio la diagonale BD.

Considero i triangoli $A\hat{B}D$ e $B\hat{D}C$. Essi hanno:

1. BD — in comune
2. $AB \cong CD$ — per HP
3. $AD \cong BC$ — per HP

Dunque i due triangoli avendo i tre lati ordinatamente congruenti sono congruenti per il terzo criterio di congruenza (LLL). In particolare ad elementi congruenti si oppongono elementi congruenti cioè:

1. $A\hat{B}D \cong B\hat{D}C$, di conseguenza $AB \parallel DC$, perché tagliate dalla trasversale BD, formano angoli alterni interni congruenti;
2. $B\hat{D}A \cong D\hat{B}C$, di conseguenza $AD \parallel BC$, perché tagliate dalla trasversale BD, formano angoli alterni interni congruenti;
3. $B\hat{A}D \cong B\hat{C}D$

ABCD ha i lati opposti paralleli, quindi è un parallelogramma

2. "Angoli opposti sono congruenti".

Hp: $\alpha \cong \gamma$, $\beta \cong \delta$

Th: ABCD parallelogramma

Dimostrazione:

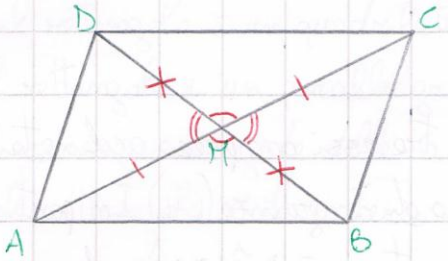
La somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a due angoli piat quindi: $\alpha+\beta+\gamma+\delta \cong 2\pi$

Inoltre:

1. $\alpha+\delta \cong \beta+\gamma$ perché somma di angoli congruenti, quindi $\alpha+\delta \cong \pi$, di conseguenza $AB \parallel CD$ perché tagliate da AD formano angoli coniugati interni supplementari;
2. $\gamma+\delta \cong \alpha+\beta$ perché somma di angoli congruenti, quindi $\gamma+\delta \cong \pi$, di conseguenza $BC \parallel AD$ perché tagliate da CD formano angoli coniugati interni supplementari.

ABCD ha i lati opposti paralleli, quindi è un parallelogramma

3. "Le diagonali si bisecano".



Hp: $AH \cong HC$
$BH \cong HD$

Th: ABCD parallelogramma

Dimostrazione:

Considero i triangoli $A\overset{\triangle}{H}B$ e $C\overset{\triangle}{H}D$. Essi hanno:

1. $AH \cong HC$ per HP
2. $A\hat{H}B \cong C\hat{H}D$ perché opposti al vertice
3. $BH \cong HD$ per HP

Dunque i due triangoli avendo due lati e l'angolo tra essi compreso ordinatamente congruenti sono congruenti per il primo criterio di congruenza (LAL). In particolare a lati congruenti si oppongono angoli congruenti cioè: $H\hat{B}A \cong H\hat{D}C$, di conseguenza $AB \parallel CD$, perché tagliate dalla trasversale BD, formano angoli interni congruenti. Faccio l'analogo ragionamento per i triangoli $A\overset{\triangle}{H}D$ e $B\overset{\triangle}{H}C$, dimostro che $D\hat{A}H \cong H\hat{C}B$, di conseguenza $AD \parallel BC$.

ABCD ha i lati opposti paralleli, quindi è un parallelogramma

4. "Due lati opposti sono paralleli e congruenti".

Hp: $AD \parallel BC$
$AD \cong BC$

Th: ABCD parallelogramma

Dimostrazione: Traccio la diagonale AC.

Considero i triangoli $A\overset{\triangle}{D}C$ e $A\overset{\triangle}{B}C$. Essi hanno:

1. $AD \cong BC$ per HP

2. $D\hat{A}C \cong A\hat{C}B$ perchè angoli alterni interni delle parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC;

3. AC in comune

Dunque i due triangoli avendo due lati e l'angolo tra essi compreso ordinatamente congruenti sono congruenti per il primo criterio di congruenza (LAL). In particolare a lati congruenti si oppongono angoli congruenti cioè: $D\hat{C}A \cong C\hat{A}B$ di conseguenza $AB \parallel CD$, perchè tagliate dalla trasversale AC, formano angoli interni congruenti.

ABCD ha i lati opposti paralleli, quindi è un parallelogrammo

I parallelogrammi si dividono in:

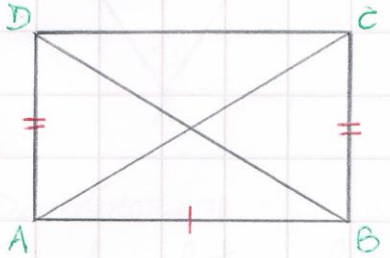
1. rettangoli
2. rombi
3. quadrati

Il Rettangolo

Il rettangolo è un quadrilatero con tutti e quattro gli angoli congruenti; il rettangolo è un parallelogramma, in quanto ha gli angoli opposti congruenti, di conseguenza gode delle 5 proprietà del parallelogramma, più quelle del rettangolo e il criterio.

Proprietà del rettangolo

1. "Le diagonali sono congruenti".



Hp: ABCD rettangolo

Th: $AC \cong BD$

Dimostrazione

Considero i triangoli rettangoli $A\hat{B}D$ e $A\hat{B}C$. Essi hanno:

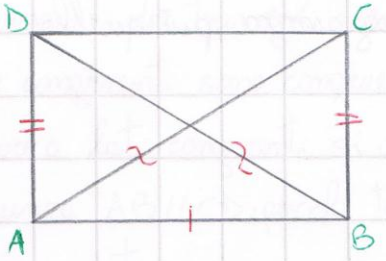
1. AB in comune
2. $AD \cong BC$ perchè lati opposti del rettangolo

Dunque i due triangoli avendo due elementi congruenti, oltre all'angolo retto sono congruenti per il criterio di congruenza dei triangoli rettangoli. In particolare ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti cioè:

$BD \cong AC$

Criterio del rettangolo

1. "Se in un parallelogramma le diagonali sono congruenti allora esso è un rettangolo."



Hp: ABCD parallelogramma
$BD \cong AC$

Th: ABCD rettangolo

Dimostrazione

Considero i triangoli $A\overset{\triangle}{B}C$ e $A\overset{\triangle}{B}D$. Essi hanno:

1. AB — in comune
2. $AD \cong BC$ — per HP
3. $AC \cong BD$ — per HP

Dunque i due triangoli avendo i tre lati ordinatamente congruenti sono congruenti per il terzo criterio di congruenza. (LLL). In particolare a lati congruenti si oppongono angoli congruenti cioè: $D\hat{A}C \cong A\hat{B}C$

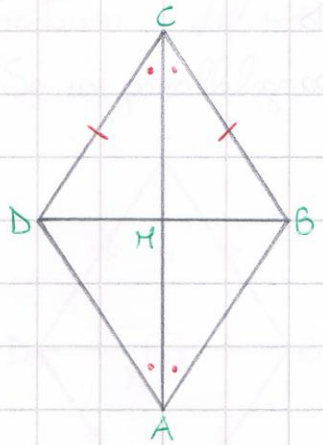
Tali angoli sono adiacenti al lato AB, pertanto sono anche supplementari perché ABCD è un parallelogramma. Dunque sono entrambi retti. Anche $B\hat{C}D$ è retto perché opposto all'angolo $D\hat{A}B$. Anche $A\hat{D}C$ è retto perché opposto all'angolo $A\hat{B}C$.

ABCD ha 4 angoli retti, quindi è un rettangolo

Il Rombo

Proprietà del rombo

1. "Le diagonali sono perpendicolari e bisettrici degli angoli".



Hp: ABCD rombo

Th: $AC \perp DB$

AC bisettrice di $\hat{A}$ e $\hat{C}$

Dimostrazione

Considero il triangolo $D\hat{B}C$. Esso è isoscele perchè $CD \cong BC$ per HP. Poichè ABCD è un rombo: le sue diagonali si bisecano quindi H è il punto medio della base di un triangolo isoscele e pertanto anche piede dell'altezza CH. Dunque $CH \perp DB$, di conseguenza: $AC \perp DB$

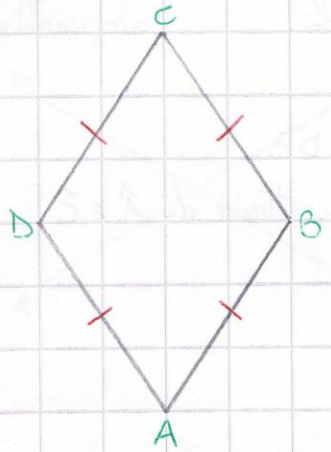
Ma in un triangolo isoscele l'altezza è anche bisettrice. Quindi $D\hat{C}A \cong B\hat{C}A$ e per angoli alterni interni $C\hat{A}B \cong C\hat{A}D$. Quindi AC è bisettrice di $\hat{A}$ e $\hat{C}$.

Definizione

Il rombo è un quadrilatero con tutti e quattro i lati congruenti; il rombo è un parallelogramma, in quanto ha i lati opposti congruenti, di conseguenza gode delle 5 proprietà del parallelogramma, più quelle del rombo e i tre criteri.

Criterio 1 del rombo

1. "Se un parallelogramma ha due lati consecutivi congruenti allora è un rom



Hp: ABCD parallelogramma
$AB \cong BC$

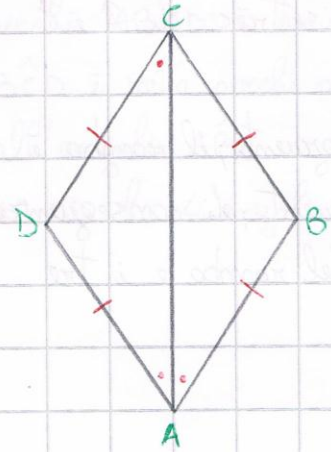
Th: ABCD rombo

Dimostrazione

Per HP ABCD è un parallelogramma dunque i lati opposti sono congru enti. ABCD è un parallelogramma equilatero, cioè un rombo

Criterio 2 del rombo

2. "Se un parallelogramma ha una diagonale bisettrice di un angolo, allor è un rombo."



Hp: ABCD parallelogramma
$D\hat{A}C \cong C\hat{A}B$

Th: ABCD rombo

Dimostrazione

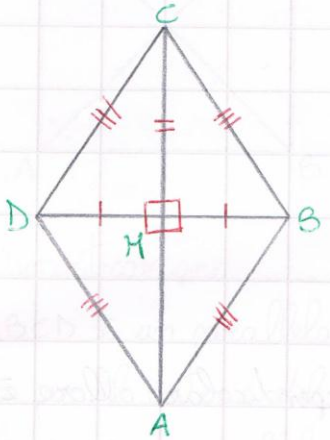
$D\hat{C}A \cong B\hat{A}C$ perché angoli alterni interni delle rette parallele AB e CD tagliate dalla trasversale AC.

Allora il triangolo $A\overset{\triangle}{C}D$ è isoscele: $CD \cong AD$

2. ABCD per il primo criterio del rombo è un rombo

Criterio 3 del rombo

3. "Se un parallelogramma ha le diagonali perpendicolari allora è un ro



Hp: ABCD parallelogramma
$AC \perp BD$

Th: ABCD rombo

Dimostrazione

Per l'HP di parallelogramma, le diagonali si bisecano.
Considero i triangoli $D\overset{\triangle}{C}H$ e $B\overset{\triangle}{H}C$. Essi hanno:

1. $DH \cong HB$ per precedente dimostrazione
2. CH in comune
3. $D\hat{H}C \cong B\hat{H}C$ per HP

Dunque i due triangoli avendo due lati e l'angolo tra essi compreso ordin tamente congruenti sono congruenti per il primo criterio di congruenza (LAL). I particolare ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti cioè: $CD \cong BC$
ABCD per il primo criterio del rombo è un rombo

Il quadrato

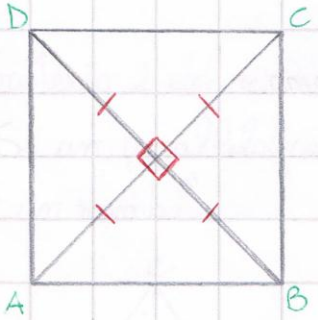
Il quadrato è un quadrilatero regolare, cioè ha tutti e quattro gli angoli e i lati congruenti; il quadrato è un parallelogramma, in quanto ha gli angoli e i lati opposti congruenti, di conseguenza gode delle 5 proprietà del parallelogramma, più quelle del quadrato e i due criteri.

Nel quadrato le diagonali sono:

1. congruenti
2. perpendicolari
3. bisettrici

Criterio 1 del quadrato

1. "Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e perpendicolari allora è un quadrato."



Hp: ABCD parallelogramma
$AC \cong BD$
$AC \perp BD$

Th: ABCD quadrato

Dimostrazione

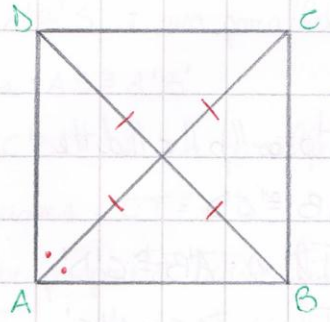
ABCD è un parallelogramma con $AC \cong BD$ (diagonali congruenti), di conseguenza per il criterio del rettangolo, ABCD è un rettangolo, cioè è equiangolo.

ABCD è un parallelogramma con $AC \perp BD$ (diagonali perpendicolari), di conseguenza per il terzo criterio del rombo, ABCD è un rombo, cioè è equilatero.

ABCD essendo equiangolo ed equilatero è un quadrato

Criterio 2 del quadrato

2. "Se un parallelogramma ha le diagonali congruenti e una di esse bisettri di un angolo allora è un quadrato."



Hp: ABCD parallelogramma
$AC \cong BD$
$D\hat{A}C \cong C\hat{A}B$

Th: ABCD quadrato

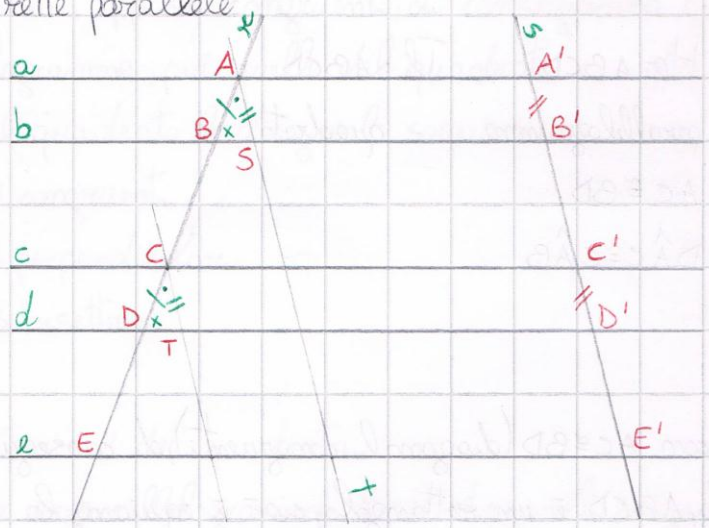
Dimostrazione

ABCD è un parallelogramma con $AC \cong BD$ (diagonali congruenti), di conseguenza per il criterio del rettangolo, ABCD è un rettangolo, cioè è equiangolo.
ABCD è un parallelogramma con $D\hat{A}C \cong C\hat{A}B$ (AC bisettrice di $\hat{A}$), di conseguenza per il secondo criterio del rombo, ABCD è un rombo, cioè è equilat
ABCD essendo equiangolo e equilatero è un quadrato

Teorema di Talete

Fascio di rette parallele: un insieme di rette parallele

Trasversale di un fascio di rette parallele: è una retta che interseca tutte le rette parallele



Hp: $a \parallel b \parallel c \parallel d \parallel e$

$AB \cong CD$

Th. 1): $A'B' \cong C'D'$

Th. 2): $AC \to A'C'$

Teorema: "In un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, a segmenti congruenti sulla prima trasversale corrispondono segmenti congruenti sulla seconda trasversale".

Seconda Parte

"In un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, alla somma di segmenti sulla prima trasversale corrisponde la somma dei corrispondenti segmenti sulla seconda trasversale".

Dimostrazione 1):

Dai vertici A e C traccio le rette parallele alla trasversale s.
Considero i triangoli $A\hat{B}S$ e $C\hat{D}T$. Essi hanno:

1. $AB \cong CD$ — per HP
2. $D\hat{C}T \cong B\hat{A}S$ — perché angoli corrispondenti delle parallele CT e AS, tagliate dalla trasversale r
3. $C\hat{D}T \cong A\hat{B}S$ — perché angoli corrispondenti delle parallele b e d, tagliate dalla trasversale r

Dunque i due triangoli avendo un lato e gli angoli ad esso adiacenti ordinatamente congruenti sono congruenti per il secondo criterio di congruenza.
In particolare ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti cioè: $AS \cong CT$
$AA'B'S$ è un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli, di conseguenza: $AS \cong A'B'$
$CC'D'T$ è un parallelogramma perché ha i lati opposti paralleli, di conseguenza: $CT \cong C'D'$
Per proprietà transitiva: $AS \cong A'B' \cong CT \cong C'D'$, quindi: $A'B' \cong C'D'$

Seconda parte

Considero i tre segmenti AB, BC e AC e osservo che per la corrispondenza biunivoca di Talete:

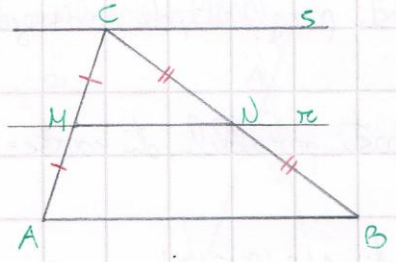
$AB \rightarrow A'B'$

$BC \rightarrow B'C'$

$$AC \rightarrow A'C' \begin{cases} AC \cong AB + BC \\ A'C' \cong A'B' + B'C' \end{cases}$$

Primo corollario

"In un triangolo la retta parallela ad un lato passante per il punto medio di un lato dimezza il terzo lato."



Hp: ABC triangolo
$AM \cong MC$
$r // AB$

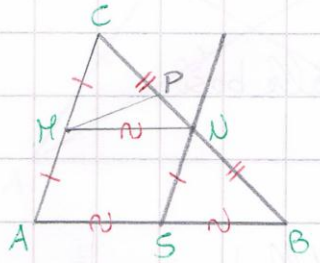
Th: $CN \cong BN$

Dimostrazione

Dal vertice C traccio la parallela al lato AB.
Considero il fascio di rette parallele AB, r e s tagliate dalle trasversali AC e BC. Per il teorema di Talete, in un fascio di rette parallele tagliate da due trasversali, a segmenti congruenti sulla prima trasversale corrispondono segmenti congruenti sulla seconda trasversale, quindi:
$CN \cong BN$

Secondo corollario

"La congiungente i punti medi dei lati di un triangolo è parallela al terzo lato e congruente alla sua metà".



Hp: ABC triangolo
$AM \cong MC$
$CN \cong NB$

Th: $MN \parallel AB$
$MN \cong \frac{1}{2} AB$

Dimostrazione

Per assurdo nego la tesi: $MN \nparallel AB$, di conseguenza traccio la parallela ad AB, che interseca il lato BC nel suo punto medio P, ma per l'ass me del punto medio esiste ed è unico il punto medio di un lato. Non posso negare la tesi quindi:

$MN \parallel AB$

Traccio la parallela ad AC, passante per il punto medio N, che interse ca il lato AB nel suo punto medio S.

AMNS ha i lati opposti e paralleli, di conseguenza è un parallelogram me, quindi: $MN \cong AS \Rightarrow MN \cong \frac{1}{2} AB$

Il Trapezio

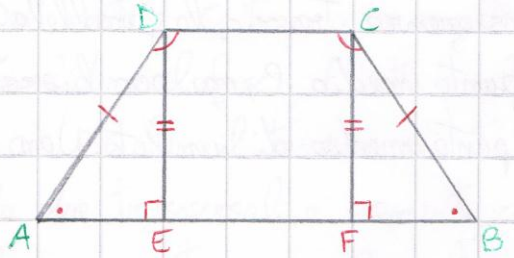
Il trapezio è un quadrilatero con due lati paralleli, le basi, e altri due lati obliqui.

TRAPEZIO ISOSCELE: lati obliqui congruenti

TRAPEZIO RETTANGOLO: un lato obliquo perpendicolari alle basi

Proprietà del trapezio isoscele

"In un trapezio isoscele gli angoli adiacenti a ognuna delle basi sono congruenti".



Hp: ABCD trapezio

$AD \cong BC$

Th: $\hat{A} \cong \hat{B}$

$\hat{C} \cong \hat{D}$

Dimostrazione

Traccio le altezze DE e CF.

Considero i triangoli rettangoli $A\overset{\triangle}{D}E$ e $F\overset{\triangle}{C}B$. Essi hanno:

1. $AD \cong BC$ per HP
2. $DE \cong CF$ perché lati opposti del rettangolo CDEF

Dunque i due triangoli rettangoli avendo due elementi ordinatamente congruenti, oltre all'angolo retto, sono congruenti per le proprietà del triangolo rettangolo. In particolare a lati congruenti si oppongono angoli congruenti cioè: $\hat{A} \cong \hat{B}$

$\hat{A}$ supplementare $\hat{D}$ perché angoli coniugati interni delle parallele AB e CD, tagliate dalla trasversale AD.

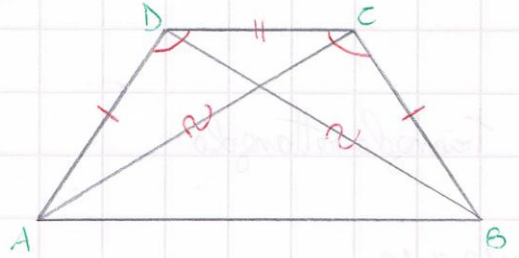
$\hat{B}$ supplementare $\hat{C}$ perché angoli coniugati interni delle parallele AB e CD, tagliate dalla trasversale BC.

$\hat{C}$ e $\hat{D}$ supplementari $\hat{A}$ e $\hat{B}$, congruenti per precedente dimostrazione, quindi:

$\hat{C} \cong \hat{D}$

Teorema del trapezio isoscele

"In un trapezio isoscele le diagonali sono congruenti".



Hp: ABCD trapezio
$AD \cong BC$

Th: $AC \cong BD$

Dimostrazione

Considero i triangoli $A\overset{\triangle}{C}D$ e $B\overset{\triangle}{C}D$. Essi hanno:

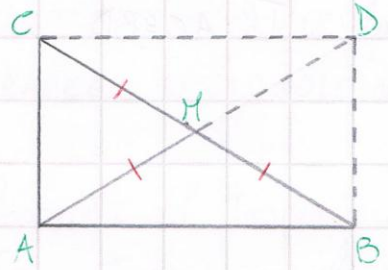
1. CD in comune
2. $A\hat{D}C \cong B\hat{C}D$ perché angoli adiacenti alla stessa base di ABCD
3. $AD \cong BC$ per HP

Dunque i due triangoli avendo due lati e l'angolo tra essi compreso ordinatamente congruenti sono congruenti per il primo criterio di congruenza (LAL). In particolare ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti cioè:

$AC \cong BD$

Teorema del triangolo rettangolo

"In un triangolo rettangolo la mediana relativa all'ipotenusa è la metà dell'ipotenusa"



Hp: $\overset{\triangle}{ABC}$ triangolo rettangolo

$BM \cong MC$

Th: $AM \cong MB \cong MC$

Dimostrazione

Traccio il rettangolo ABCD, di conseguenza le diagonali: $AD \cong BC$

Essendo ABCD un rettangolo e quindi un parallelogramma, le diagonali si bisecano cioè:

$AM \cong MB \cong MC$