128 **ESERCIZIO GUIDATO**

In un parallelogramma $ABCD$, sia M il punto medio di AD ed N il punto medio di BC. Dimostra che:

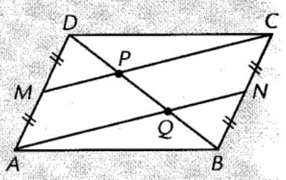
a. **AN e MC sono paralleli;**

b. **i segmenti AN e CM dividono la diagonale BD in tre segmenti congruenti.**

IPOTESI $ABCD$ è un parallelogramma, $AM \cong MD$ e $BN \cong NC$

TESI **a.** $AN \parallel MC$ **b.** $DP \cong PQ \cong QB$

DIMOSTRAZIONE



- Osserva che $ANCM$ è un parallelogramma perché $AM \parallel NC$ e $AM \cong$ .... Quindi $AN \parallel MC$.
- Considera le seguenti tre rette parallele: la retta AN, la retta MC e la retta r per D parallela a MC. Queste tre rette sono tagliate dalle trasversali AD e BD. Poiché $AM \cong MD$ (per ipotesi), puoi dire, per il piccolo teorema ...., che:

  $DP \cong$ .... [*]

- Considera le tre rette parallele ...., ... e .... Queste tre rette sono tagliate dalle trasversali BD e BC. Poiché $BN \cong NC$ (per ipotesi) puoi dire, per il piccolo teorema ...., che:

  .... [**]

- Da [*] e [*] segue la tesi.

Nota Poiché abbiamo dimostrato che $DP \cong PQ \cong QB$, possiamo dedurre, per esempio, che $DQ \cong 2QB$ e che $BP \cong 2PD$. In alcuni dei prossimi esercizi ti verrà chiesto di dimostrare che un segmento è doppio di un altro. La tesi è formalmente diversa ma, in pratica, si può ottenere con ragionamenti simili a quelli che abbiamo appena formulato: mediante il piccolo teorema di Talete si dimostra che un segmento resta diviso in tre segmenti congruenti e di qui si deduce che un segmento è doppio di un altro.

129 In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, sia M il punto medio di BC. Detta H la proiezione di M su AC, dimostra che, comunque si scelga un punto P sul cateto AB, il punto di intersezione fra PC e MH dimezza PC. In corrispondenza di quale posizione di P il punto di intersezione fra PC e MH dimezza anche MH?

130 **Videolezione** In un parallelogramma $ABCD$, il lato AB è il doppio del lato BC. Prolunga BC, dalla parte di C, di un segmento $CE \cong BC$. Dimostra che AE è la bisettrice di $B\hat{A}D$ e che, comunque scelto un punto P su AB, il segmento PE resta dimezzato dal suo punto di intersezione con CD.

131 In un parallelogramma $ABCD$, siano M ed N, rispettivamente, i punti medi di AD e di BC. Dimostra che, comunque scelto un punto P su AB, il punto di intersezione fra MN e DP è il punto medio di DP.

132 In un triangolo ABC, sia CM la mediana relativa ad AB. Detto N il punto medio di CM, sia P il punto in cui la retta AN incontra il lato BC. Dimostra che $PB \cong 2CP$.
(*Suggerimento*: traccia da M e da C le parallele ad AP)

133 In un parallelogramma $ABCD$, di centro O, risulta $AB \cong 2BC$. Traccia la diagonale BD e indica con M il punto medio di OD e con N il punto medio di OB. La semiretta di origine A, passante per M, interseca DC in P e la semiretta di origine A, passante per N, interseca BC in Q. Dimostra che $PC + CQ \cong AB$.
(*Suggerimento*: considera i triangoli ADC e ABC e osserva che si verifica una situazione simile a quella descritta nell'esercizio precedente)

Dimostrazioni (teorema dei punti medi)

134 Dato un parallelogramma $ABCD$ di centro O, siano P, Q, R e S, rispettivamente, i punti medi di AO, BO, CO e DO. Dimostra che $PQRS$ è un parallelogramma.

135 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, sia CH l'altezza relativa ad AB. Chiama M e N, rispettivamente, i punti medi di AC e di BC; poi dimostra che i segmenti BM e HN si incontrano nel loro punto medio.

136 Dimostra che i punti medi dei lati di un quadrilatero sono i vertici di un parallelogramma. Quale caratteristica deve avere il quadrilatero affinché tale parallelogramma sia un rombo? E affinché sia un rettangolo?
(*Suggerimento*: traccia le diagonali del quadrilatero)

137 Dimostra che il segmento congiungente i punti medi dei lati obliqui di un trapezio è congruente alla semisomma delle basi.
(*Suggerimento*: conduci, da uno degli estremi della base minore, la parallela al lato obliquo che non contiene quell'estremo)

138 Dimostra che il segmento congiungente i punti medi delle diagonali di un trapezio è congruente alla semidifferenza delle basi.
(*Suggerimento*: prolunga il segmento che congiunge i punti medi delle diagonali fino a incontrare un lato obliquo e utilizza il teorema dei punti medi)

Esercizi riassuntivi: dimostrazioni sul teorema di Talete e sul teorema dei punti medi

139 Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB e sia M il punto medio di AB. Sia H la proiezione di M sul lato AC. Dimostra che MH è congruente alla metà dell'altezza del triangolo relativa al lato AC.

140 Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa AB e siano M e N, rispettivamente, i punti medi di AC e BC.
- **a.** Detto P un punto di AB e Q il punto di intersezione di MN e CP, dimostra che Q è il punto medio di CP.
- **b.** Indicate con H e K, rispettivamente, le proiezioni di P e Q su BC, dimostra che K è il punto medio di HC.

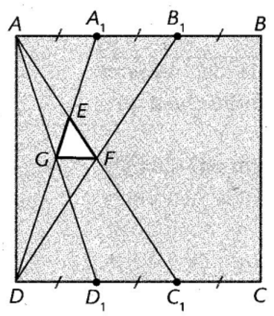
141 Sia $ABCD$ un parallelogramma. Costruisci, esternamente al parallelogramma, due triangoli BCE e ADF. Indica:
- con P e Q rispettivamente i punti medi di BE e CE;
- con M e N, rispettivamente i punti medi di AF e DF.

Dimostra che $MPQN$ è un parallelogramma.

142 Sia $ABCD$ un parallelogramma di centro O. Traccia:
- la retta r passante per O e parallela ai lati BC e AD;
- una retta s, avente in comune con il parallelogramma soltanto il punto A.

Indica con E il punto di intersezione di s con r e con F il punto di intersezione di s con la retta BC. Dimostra che $FC \cong 2EO$.

143 Sia $ABCD$ un quadrato; A_1 e B_1 sono punti sul lato AB tali che $AA_1 \cong A_1B_1 \cong B_1B$; C_1 e D_1 punti sul lato CD tali che $CC_1 \cong C_1D_1 \cong D_1D$ (vedi figura qui sotto). Dimostra che:
- **a.** G è il punto medio di AD_1 e A_1D;
- **b.** F è il punto medio di AC_1 e B_1D;
- **c.** GF è parallelo ad AB e CD.



144 Dato un angolo acuto $r\widehat{O}s$, considera:
- **a.** sul lato r, tre punti A, B, C tali che $OA \cong AB \cong BC$;
- **b.** sul lato s tre punti D, E, F tali che $OD \cong DE \cong EF$;
- **c.** sul prolungamento di AE dalla parte di E, il punto G tale che $AE \cong EG$.

Dimostra che:
- **d.** DA è parallelo a CG e $DA \cong \frac{1}{4}CG$;
- **e.** DA è parallelo a GF;
- **f.** C, F e G sono allineati.

145 Dimostra che i punti medi dei tre lati di un triangolo e il piede di una delle tre altezze sono vertici di un trapezio isoscele.
(*Suggerimento*: ricorda il **teorema 17.16** e il **teorema 18.15**)

146 In un trapezio $ABCD$, la base maggiore AB è il triplo della base minore CD. Siano E e F, rispettivamente, i punti in cui il segmento che congiunge i punti medi dei lati obliqui del trapezio incontra la diagonale AC e la diagonale BD. Dimostra che $EFCD$ è un parallelogramma.
(*Suggerimento*: può essere utile tenere presente il risultato dell'Esercizio 138)

147 Dimostra che il segmento congiungente i punti medi delle diagonali di un quadrilatero incontra il segmento che congiunge i punti medi di due lati opposti del quadrilatero nel suo punto medio.
(*Suggerimento*: dimostra che il quadrilatero che ha come vertici i punti medi dei due lati opposti e delle diagonali è un parallelogramma)