n. 1 p. 429

$y = x^2 - 6x + 9$ in $[3;6]$

f è continua in $[3;6]$

f è derivabile in $(3;6)$

$\exists c \in (3;6) \mid f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(x) = 2x - 6$ $\quad f(3) = 9 - 18 + 9 = 0$ $\quad f(6) = 36 - 36 + 9 = 9$

$2c - 6 = \frac{9}{3} \rightarrow 2c = 9 \rightarrow c = \frac{9}{2}$

n. 2 p. 429

$y = -x^2 + 4$ in $[-2;1]$

f è continua in $[-2;1]$

f è derivabile in $(-2;1)$ $\rightarrow \exists c \in (-2;1) \mid f'(c) = \dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}$

$f'(x) = -2x$ $\quad f(1) = 3$ $\quad f(-2) = 0$

$-2c = \frac{3}{3} \rightarrow c = -\frac{1}{2}$

n. 3 p. 429

$y = x^3 - x^2 + x - 1$ in $[0;2]$

f è continua in $[0;2]$

f è derivabile in $(0;2)$ $\rightarrow \exists c \in (0;2) \mid f'(c) = \dfrac{f(2)-f(0)}{2}$

$f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ $\quad f(2) = 5$ $\quad f(0) = -1$

$3c^2 - 2c + 1 = \frac{6}{2} \rightarrow 3c^2 - 2c - 2 = 0$ $\quad \frac{\Delta}{4} = 1 + 6 = 7$

$c_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{7}}{3} = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{7}}{3} \approx -0,54858 & \text{non accett.} \\ \frac{1+\sqrt{7}}{3} \approx 1,215 & \text{accett.} \end{cases}$

n. 4 p. 429

$y = (2x-3)^3$ in $[0;\frac{3}{2}]$

f è continua in $[0;\frac{3}{2}]$

f è derivabile in $(0;\frac{3}{2})$ $\rightarrow \exists c \in (0;\frac{3}{2}) \mid f'(c) = \dfrac{f(\frac{3}{2}) - f(0)}{\frac{3}{2}}$

$f'(x) = 6(2x-3)^2$ $\quad f(\frac{3}{2}) = 0$ $\quad f(0) = -27$

$6(2c-3)^2 = \dfrac{27}{\frac{3}{2}} \rightarrow 6(2c-3)^2 = 18 \rightarrow (2c-3)^2 = 3 \rightarrow 2c - 3 = \pm\sqrt{3} \rightarrow$

$\rightarrow 2c = 3 \pm \sqrt{3} \rightarrow c = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx 0,63 & \text{accett.} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \approx 2,366 & \text{non accett.} \end{cases}$

n. 5 p. 429

$y = \frac{2}{x}$ in $\left[\frac{1}{2};2\right]$

$D = \mathbb{R} - \{0\}$

f è continua in $\left[\frac{1}{2};2\right]$
f è derivabile in $\left(\frac{1}{2};2\right)$ $\rightarrow \exists\, c \in \left(\frac{1}{2};2\right) \mid f'(c) = \dfrac{f(2)-f(\frac{1}{2})}{2-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ $\quad f(2) = 1 \quad f(\frac{1}{2}) = 4$

$-\frac{2}{c^2} = \dfrac{1-4}{\frac{3}{2}} \longrightarrow -\frac{2}{c^2} = -2 \rightarrow c^2 = 1 \rightarrow c = \begin{cases} -1 & \text{non accett.} \\ +1 & \text{accett.} \end{cases}$

n. 6 p. 429

$y = x^3$ in $[-2;2]$

f è continua in $[-2;2]$
f è derivabile in $(-2;2)$ $\longrightarrow \exists\, c \in (-2;2) \mid f'(c) = \dfrac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$

$f'(x) = 3x^2 \quad f(2) = 8 \quad f(-2) = -8$

$3c^2 = \frac{16}{4} \rightarrow c^2 = \frac{4}{3} \rightarrow c = \begin{cases} -\frac{2\sqrt{3}}{3} & \text{accett.} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \text{accett.} \end{cases}$

n. 7 p. 429

$y = x^3 - 2x$ in $[-1;3]$

f è continua in $[-1;3]$
f è derivabile in $(-1;3)$ $\longrightarrow \exists\, c \in (-1;3) \mid f'(c) = \dfrac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$

$f'(x) = 3x^2 - 2 \quad f(3) = 21 \quad f(-1) = 1$

$3c^2 - 2 = \frac{20}{4} \rightarrow 3c^2 = 7 \rightarrow c = \begin{cases} -\sqrt{\frac{7}{3}} & \text{non accett.} \\ \sqrt{\frac{7}{3}} & \text{accett.} \end{cases}$

n. 8 p. 429

$y = \dfrac{2x}{x+1}$ in $[1;3]$

$D = \mathbb{R} - \{-1\}$

f è continua in $[1;3]$
f è derivabile in $(1;3)$ $\rightarrow \exists\, c \in (1;3) \mid f'(c) = \dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$

$f'(x) = \dfrac{2x+2-2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2} \quad f(3) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad f(1) = 1$

$\dfrac{2}{(c+1)^2} = \dfrac{\frac{1}{2}}{2} \rightarrow (c+1)^2 = 8 \rightarrow c+1 = \pm 2\sqrt{2} \rightarrow c = \begin{cases} -1-2\sqrt{2} & \text{non accett.} \\ -1+2\sqrt{2} & \text{accett.} \end{cases}$

n. 9   p. 429

$y = \frac{x+3}{2x-5}$ in $[0;2]$

$D = \mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$

f è continua in $[0;2]$
f è derivabile in $(0;2)$ $\rightarrow \exists c \in (0;2) \mid f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$

$f'(x) = \frac{2x-5-2x-6}{(2x-5)^2} = -\frac{11}{(2x-5)^2}$ $f(2) = -5$ $f(0) = -\frac{3}{5}$

$-\frac{11}{(2c-5)^2} = \frac{-5+\frac{3}{5}}{2} \rightarrow -\frac{11}{(2c-5)^2} = -\frac{11}{5} \rightarrow (2c-5)^2 = 5 \rightarrow$

$\rightarrow 2c-5 = \sqrt{5} \vee 2c-5 = -\sqrt{5} \rightarrow c = \begin{cases} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & \text{non accett.} \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2} & \text{accett.} \end{cases}$

n. 10   p. 429

$y = \sqrt{x}$ in $[4;9]$

$D = [0;+\infty)$

f è continua in $[4;9]$
f è derivabile in $(4;9)$ $\rightarrow \exists c \in (4;9) \mid f'(c) = \frac{f(9)-f(4)}{5}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f(9) = 3$ $f(4) = 2$

$\frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{5} \rightarrow \sqrt{c} = \frac{5}{2} \rightarrow c = \frac{25}{4}$

n. 11   p. 429

$y = \frac{x^2+1}{2x+1}$ in $[2;3]$

$D = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

f è continua in $[2;3]$
f è derivabile in $(2;3)$ $\rightarrow \exists c \in (2;3) \mid f'(c) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$

$f'(x) = \frac{4x^2+2x-2x^2-2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-2}{(2x+1)^2}$ $f(3) = \frac{10}{7}$ $f(2) = 1$

$\frac{2c^2+2c-2}{(2c+1)^2} = \frac{3}{7} \rightarrow 14c^2+14c-14 = 12c^2+12c+3 \rightarrow$

$\rightarrow 2c^2+2c-17 = 0$ $\frac{\Delta}{4} = 1+34 = 35$

$c_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{35}}{2} = \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{35}}{2} & \text{non accett.} \\ \frac{\sqrt{35}-1}{2} \approx 2{,}46 & \text{accett.} \end{cases}$

n. 12 p. 430

$$y = \frac{2x^2}{x-1} \quad \text{in} \quad \left[-3; \tfrac{1}{2}\right]$$

$D = \mathbb{R} - \{1\}$

f è continua in $\left[-3; \tfrac{1}{2}\right]$

f è derivabile in $\left(-3; \tfrac{1}{2}\right)$ $\longrightarrow \exists\, c \in \left(-3; \tfrac{1}{2}\right) \mid f'(c) = \dfrac{f(\frac{1}{2}) - f(-3)}{\frac{1}{2} - (-3)}$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -1 \qquad f(-3) = -\frac{9}{2}$$

$$\frac{2c^2 - 4c}{(c-1)^2} = \frac{-1 + \frac{9}{2}}{\frac{1}{2} + 3} \rightarrow \frac{2(c^2 - 2c)}{(c-1)^2} = 1 \rightarrow 2c^2 - 4c = c^2 - 2c + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow c^2 - 2c - 1 = 0 \qquad c_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} 1 - \sqrt{2} & \text{accett.} \\ 1 + \sqrt{2} & \text{non accett.} \end{cases}$$

n. 13 p. 430

$$y = \sqrt{1-x} \quad \text{in} \quad [-3; 0]$$

$D = (-\infty; 1]$

f è continua in $[-3; 0]$

f è derivabile in $(-3; 0)$ $\longrightarrow \exists\, c \in (-3; 0) \mid f'(c) = \dfrac{f(0) - f(-3)}{3}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} \qquad f(0) = 1 \qquad f(-3) = 2$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{1-c}} = \frac{1-2}{3} \rightarrow \sqrt{1-c} = \frac{3}{2} \rightarrow 1 - c = \frac{9}{4} \rightarrow c = -\frac{5}{4}$$

n. 14 p. 430

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{in} \quad [-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$$

$D = \mathbb{R}$

f è continua in $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$

f è derivabile in $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ $\longrightarrow \exists\, c \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \mid f'(c) = \dfrac{f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2x^3} \cancel{+2x} + x^2 + 1 \cancel{-2x^3} - 2x^2 \cancel{-2x}}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2} \qquad f(\sqrt{3}) = \frac{4+\sqrt{3}}{4} \qquad f(-\sqrt{3}) = \frac{4-\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1 - c^2}{(c^2+1)^2} = \frac{1}{4} \rightarrow 4 - 4c^2 = c^4 + 2c^2 + 1 \rightarrow c^4 + 6c^2 - 3 = 0$$

$$c^2 = -3 \pm 2\sqrt{3}$$

$c^2 = -3 - 2\sqrt{3}$ impossibile

$$c^2 = 2\sqrt{3} - 3 \rightarrow c = \pm\sqrt{2\sqrt{3} - 3}$$

n. 15 p. 430

$y = \sqrt{16-x^2}$ in $[-4;2]$

$D = [-4;4]$

f è continua in $[-4;2]$

f è derivabile in $(-4;2)$ $\rightarrow \exists c \in (-4;2) \mid f'(c) = \frac{f(2)-f(-4)}{2-(-4)}$

$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$ $f(2) = 2\sqrt{3}$ $f(-4) = 0$

$$-\frac{c}{\sqrt{16-c^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \sqrt{48-3c^2} = -3c \rightarrow \begin{cases} 48-3c^2 \geq 0 \\ -3c \geq 0 \\ 48-3c^2 = 9c^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4 \leq c \leq 4 \\ c \leq 0 \\ c^2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4 \leq c \leq 0 \\ c = \pm 2 \end{cases} \rightarrow c = -2$$

n. 16 p. 430

$y = \log x$ in $[1;e]$

$D = (0;+\infty)$

f è continua in $[1;e]$

f è derivabile in $(1;e)$ $\rightarrow \exists c \in (1;e) \mid f'(c) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ $f(e) = 1$ $f(1) = 0$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \rightarrow c = e-1$$

n. 17 p. 430

$y = e^x$ in $[-1;0]$

f è continua in $[-1;0]$

f è derivabile in $(-1;0)$ $\rightarrow \exists c \in (-1;0) \mid f'(c) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}$

$f'(x) = e^x$ $f(0) = 1$ $f(-1) = \frac{1}{e}$

$$e^c = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \rightarrow c = \log\frac{e-1}{e} = \log(e-1) - 1$$

$$c \simeq -0,458675\ldots$$

n. 18 p. 430

$y = x^2 + |x|$ in $[-1;2]$

f è continua in $[-1;2]$

f non è derivabile in $x=0$ perché

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+|h|}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h+\frac{|h|}{h}\right) = \begin{cases} -1 & \text{se } h\to 0^- \\ +1 & \text{se } h\to 0^+ \end{cases}$$

Il teorema di Lagrange non è applicabile.

n. 19 p. 430

$y = 3x^2 + x + \frac{1}{x}$ in $[-1;1]$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\to$ f non è continua in $x=0$, quindi il teorema di Lagrange non è applicabile.

n. 20 p. 430

$y = \frac{2}{x-2}$ in $[0;2]$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$

f non è continua in $x=2$, quindi il teorema di Lagrange non è applicabile.

n. 21 p. 430

$y = |x^2-4| + x$ in $[0;3]$

f è continua in $[0;3]$

f non è derivabile in $x=2$ perché

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}|+\cancel{2}+h-\cancel{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|4h+h^2|+h}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|4h+h^2|+h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2-4h+h}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-h-3) = -3$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|4h+h^2|+h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2+5h}{h} = \lim_{h\to 0^+}(h+5) = 5$$

Il teorema di Lagrange non è applicabile.

n. 22 p. 430

$y = x^2 + |x-1|$ in $[0;2]$

f è continua in $[0;2]$

f non è derivabile in $x=1$ perché

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2h+h^2+|h|-1}{h} = \lim_{h\to 0}\left(2+h+\frac{|h|}{h}\right) = \begin{cases} 1 & \text{per } h\to 0^- \\ 3 & \text{per } h\to 0^+ \end{cases}$$

Il teorema di Lagrange non è applicabile.

n. 28 p. 431

$$f(x) = (1+\sin x-\cos x)^2 + (1-\sin x+\cos x)^2$$

$$f'(x) = 2(1+\sin x-\cos x)(\cos x+\sin x) + 2(1-\sin x+\cos x)(-\cos x-\sin x)$$

$$f'(x) = \cancel{2\cos x} + \cancel{2\sin x} + \cancel{2\sin x\cos x} + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x - \cancel{2\sin x\cos x} +$$
$$\cancel{-2\cos x} \cancel{-2\sin x} + \cancel{2\sin x\cos x} + 2\sin^2 x - 2\cos^2 x - \cancel{2\sin x\cos x}$$

$$f'(x) = 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = -4(\cos^2 x - \sin^2 x) = -4\cos 2x$$

$$g(x) = 2(1-\sin 2x)$$

$$g'(x) = -4\cos 2x$$

Se due funzioni hanno la stessa derivata, esse differiscono per una costante. Non è detto che la costante sia uguale a zero, quindi non si può affermare l'identità tra $f(x)$ e $g(x)$.

$$f(x) - g(x) = K$$

$f(0) = 4$ $\quad g(0) = 2 \quad \to \quad f(0)-g(0) = 4-2 = 2 \quad \to$

$\to \quad K = 2$

$$f(x) = g(x) + 2$$

n. 29 p. 431

$$f(x) = \frac{\sin x\,(1+2\cos^2 x)}{3\cos^3 x}$$

$$f'(x) = \frac{3\cos^3 x\left[\cos x\,(1+2\cos^2 x) + \sin x\,(-4\cos x \sin x)\right] + 9\cos^2 x \sin^2 x\,(1+2\cos^2 x)}{9\cos^6 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{3}^{1}\cancel{\cos^2} x\left[\cos^2 x + 2\cos^4 x - 4\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x + 6\sin^2 x\cos^2 x\right]}{\cancel{9}_{3}\cos^{\cancel{6}\,4} x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + 2\cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x}{3\cos^4 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + 2\cos^2 x\,(\cos^2 x + \sin^2 x) + 3\sin^2 x}{3\cos^4 x} = \frac{\cos^2 x + 2\cos^2 x + 3\sin^2 x}{3\cos^4 x}$$

$$f'(x) = \frac{3\cos^2 x + 3\sin^2 x}{3\cos^4 x} = \frac{\cancel{3}(\cos^2 x + \sin^2 x)}{\cancel{3}\cos^4 x} = \frac{1}{\cos^4 x}$$

$$g(x) = \frac{1}{3}\,tg^3 x + tg\,x + 1$$

$$g'(x) = tg^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1\right) =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x}\right) = \frac{1}{\cos^4 x}$$

Se due funzione hanno la stessa derivata, esse differiscono per una costante

$$f(x) = \frac{\sin x\,(1+2\cos^2 x)}{3\cos^3 x} = \frac{\sin x\,(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos^2 x)}{3\cos^3 x} =$$

$$= \frac{\sin^3 x + 3\sin x\cos^2 x}{3\cos^3 x} = \frac{1}{3}\,tg^3 x + tg\,x = g(x) - 1$$

$$f(x) = g(x) - 1$$