"ELLISSE TRASLATA"

DATO UN VETTORE DI COMPONENTI $\vec{U}(\alpha_0, \beta_0)$

LE EQUAZIONI DI TRASLAZIONE SONO DATE DALLA TRASFORMAZIONE

$$\tau: \begin{cases} x' = x + \alpha_0 \\ y' = y + \beta_0 . \end{cases}$$

CONSIDERO UN'ELLISSE CON ASSE FOCALE ASSE X CIOE' SUPPONGO CHE $a > b$ $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ $V_x(\pm a; 0)$ $V_y(0; \pm b)$

ESSA HA CONDIZIONE $c^2 = a^2 - b^2$ CON $F(\pm c; 0)$.

DUNQUE I NUOVI FUOCHI HA

$F_1(c + \alpha_0, \beta_0)$ $F_2(-c + \alpha_0, \beta_0)$.

$V_x(\pm a + \alpha_0, \beta_0)$

$V_y(\alpha_0; \pm b + \beta_0)$

PER TRASFORMARE INVECE LA CURVA BISOGNA USARE LE EQUAZIONI DELLA TRASFORMAZIONE INVERSA DELLA TRASLAZIONE CIOE'

$$t^{-1}: \begin{cases} x = x' - \alpha_0 \\ y = y' - \beta_0 . \end{cases}$$

FACENDO A MENO DEGLI APICI PER SNELLIRE LA ~~NOTA~~ NOTAZIONE OTTENIAMO IL SEGUENTE RISULTATO:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{\tau^{-1}} \frac{(x - \alpha_0)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta_0)^2}{b^2} = 1$$

SVILUPPANDO

$$\frac{x^2+\alpha_0^2-2\alpha_0 x}{a^2}+\frac{y^2+\beta_0^2-2\beta_0 y}{b^2}=1$$

$$b^2x^2+\alpha_0^2b^2-2\alpha_0 b^2x+a^2y^2+a^2\beta_0^2-2a^2\beta_0 y-a^2b^2=0$$

ORDINANDO IL TUTTO IN ORDINE DECRESCENTE

$$b^2x^2+a^2y^2-2\alpha_0 b^2x-2a^2\beta_0 y+\alpha_0^2b^2+a^2\beta_0^2-a^2b^2=0$$

CON LE DOVUTE POSIZIONI DI "ESTETICA"

$$\boxed{Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0}$$ SI OTTIENE

EQUAZIONE CANONICA DELL'ELLISSE TRASLATA

IN CUI SI PUÒ NOTARE CHE

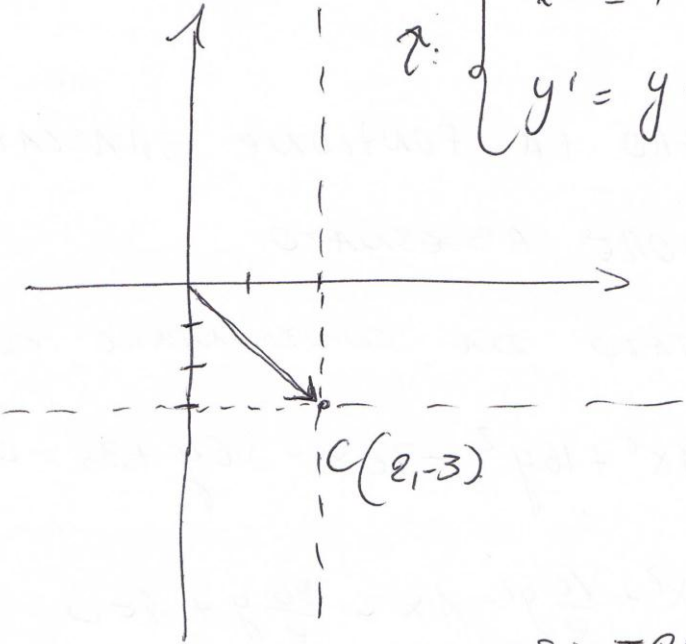
$A=b^2>0$ e $B=a^2>0$ SONO DUE NUMERI POSITIVI.

**ESEMPIO**

SCRIVERE L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE TRASLATA DI CENTRO $C(2,-3)$ CON SEMIASSI 4 e 3.

QUESTO CI SUGGERISCE CHE LE EQUAZIONI DI TRASLAZIONE SONO DATE DA

$$\tau: \begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-3. \end{cases}$$




$$t^{-1}: \begin{cases} x = x'-2 \\ y = y'+3 \end{cases}$$

DUNQUE L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE TRASLATA È

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$$

$$\frac{x^2+4-4x}{16} + \frac{y^2+9-6y}{9} = 1$$

$$9x^2+36-36x+16y^2+144-96y-144=0$$

$$9x^2+16y^2-36x-96y+36=0.$$

NOTATE

$A=9>0.$

$B=16>0$

PARTO DALL'ELLISSE AVENTE SEMIASSI $a=4$ e $b=3$

OTTENENDO IL SEGUENTE RISULTATO CON GEOGEBRA

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

PRENDIAMO IL VETTORE DI COMPONENTI $\vec{v}(2,-3)$

CONSIDERO LA FUNZIONE TRASLAZIONE

DI VETTORE ASSEGNATO:

RISULTATO DA CONFRONTARE CON GEOGEBRA

$$9x^2+16y^2-36x-96y+36=0.$$

$$x^2+\frac{16}{9}y^2-4x-\frac{96}{9}y+4=0$$

$$\boxed{x^2+1,78y^2-4x-10,67y+4=0}$$ ok.

ESEMPIO 2/ $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

RAPPRESENTA GRAFICAMENTE L'ELLISSE TRASLATA

Il CENTRO DI SIMMETRIA $C(2,-1)$.

Gli assi di simmetria $x=2$ e $y=-1$

$a=3$ e $b=2$. $F(+\sqrt{5}+2;-1)$ $F(-\sqrt{5}+2,-1)$.

$c^2=a^2-b^2=5$.

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ Area $=a\cdot b\,\pi=6\pi$

CENTRO DI SIMMETRIA DETERMINA IL VETTORE

ESEMPIO 3/

$\frac{(x+3)^2}{2}+\frac{(y-2)^2}{8}=1$

CENTRO $(-3,2)$

ASSI DI SIMM. $x=-3$ $y=2$.

SEMIASSI $a=\sqrt{2}$ $b=2\sqrt{2}$ → asse focale asse y.

$c^2=b^2-a^2=6$. ⟹ $F(-3;\ 2\pm\sqrt{6})$.

$e=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$S=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}\,\pi=4\pi$

## PROBLEMA INVERSO:

SE HO UN'EQUAZIONE DEL TIPO

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0.$$

CON $A>0$ e $B>0$ ESSA RAPPRESENTA UN'ELLISSE TRASLATA SE È SODDISFATTA LA SEGUENTE RELAZIONE

$$\boxed{\delta = \frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E>0.}$$

INFATTI RISCRIVENDO LA TRACCIA

$$Ax^2+Cx+By^2+Dy+E=0.$$

POSSO UTILIZZARE IL METODO DEL COMPLETAMENTO DEL QUADRATO

$$A\left(x^2+\frac{C}{A}x\right)+B\left(y^2+\frac{D}{B}y\right)+E=0.$$

$$A\left(x^2+\frac{C}{A}x+\frac{C^2}{4A^2}-\frac{C^2}{4A^2}\right)+B\left(y^2+\frac{D}{B}y+\frac{D^2}{4B^2}-\frac{D^2}{4B^2}\right)+E=0$$

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2-\frac{C^2}{4A}+B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2-\frac{D^2}{4B}+E=0.$$

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2+B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2=\boxed{\frac{C^2}{4A}+\frac{D^2}{4B}-E>0}$$

PONGO IL SECONDO MEMBRO UGUALE a $\delta$

E DIVIDO TUTTO PER $\delta$

$$\frac{A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{\delta}+\frac{B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2}{\delta}=1.$$

$$\frac{\left(x-\left(-\frac{C}{2A}\right)\right)^2}{\frac{\delta}{A}}+\frac{\left(y-\left(-\frac{D}{2B}\right)\right)^2}{\frac{\delta}{B}}=1$$

QUINDI UN'ELLISSE TRASLATA DI CENTRO

$$C\left(-\frac{C}{2A},-\frac{D}{2B}\right)$$

E SEMIASSI

$$a=\sqrt{\frac{\delta}{A}} \quad e \quad b=\sqrt{\frac{\delta}{B}}$$

$\boxed{\text{ESEMPIO 1}}$

$$x^2+2y^2-6x+4y+1=0.$$

VERIFICA SE RAPPRESENTA UN'ELLISSE E CALCOLANE GLI ELEMENTI

$$x^2-6x+2y^2+4y+1=0.$$

$$(x^2-6x+9-9)+2(y^2+2y+1-1)+1=0.$$

$$(x-3)^2+2(y+1)^2-2-9+1=0$$

$$(x-3)^2+2(y+1)^2=10$$

$$\frac{(x-3)^2}{10}+\frac{(y+1)^2}{5}=1$$

CENTRO DI SIMMETRIA $C(3,-1)$.

ESSENDO $a>b \Rightarrow$ ASSE FOCALE ASSE X

$c^2=10-5=5 \quad c=\pm\sqrt{5}$

$F_{1/2}(\pm\sqrt{5}+3, -1)$

SEMIASSI $a=\sqrt{10}$

$b=\sqrt{5}$

$F_{1/2}(\ \ , -1) \quad F_2(\ \ , -1).$

VERTICI$_x(3\pm\sqrt{10}; -1)$

VERTICI$_y(3, -1\pm\sqrt{5})$

## ESEMPIO 2

$$9x^2+25y^2-54x-100y-44=0.$$

$$9x^2-54x+25y^2-100y-44=0$$

$$9(x^2-6x+9-9)+25(y^2-4y+4-4)-44=0.$$

$$9(x-3)^2-81+25(y-2)^2-100-44=0.$$

$$9(x-3)^2+25(y-2)^2=225$$

$$\boxed{\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{9}=1}$$

$C(3,2)$ $\quad T:\begin{cases}x'=x+3\\ y'=y+2\end{cases}$ $\quad t^{-1}:\begin{cases}x=x'-3\\ y=y'-2.\end{cases}$

$a^2>b^2$ ASSE FOCALE ASSE $x$

$c^2=a^2-b^2=16 \longrightarrow c=4.$

$a=\pm5 \quad b=\pm3$

$F(\pm c+\alpha_0;\beta_0)$

$F(\pm4+3;2)$ $\begin{cases}F_1(7,2)\\ F_2(-1,2)\end{cases}$

$V_x(\pm a+\alpha_0;\beta_0)$ $\quad V_x(\pm5+3;2)$ $\quad V_x\begin{cases}(-2,2)\\ (8,2)\end{cases}$

$V_y(\alpha_0;\pm b+\beta_0)$ $\quad V_y(3;\pm3+2)$ $\quad V_y(3,5)$ $\quad V_y(3,-1)$