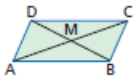
I criteri per stabilire se un quadrilatero è un parallelogramma



Ipotesi ABCD è un quadrilatero convesso in cui:

1. $AB \cong CD$ e $BC \cong AD$, o
2. $\hat{A} \cong \hat{C}$ e $\hat{B} \cong \hat{D}$, o
3. $AM \cong MC$ e $BM \cong MD$, o
4. $AB \cong CD$ e $AB \parallel CD$.

Tesi ABCD è un parallelogramma.

I seguenti teoremi forniscono quattro **condizioni sufficienti** affinché un quadrilatero sia un parallelogramma.

TEOREMA

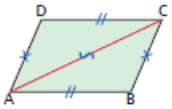
Se un quadrilatero convesso ha

1. i lati opposti congruenti, *oppure*
2. gli angoli opposti congruenti, *oppure*
3. le diagonali che si incontrano nel loro punto medio, *oppure*
4. due lati opposti congruenti e paralleli,

allora è un parallelogramma.

DIMOSTRAZIONE

1. Dobbiamo dimostrare che i lati opposti di *ABCD* sono paralleli.
Disegniamo la diagonale *AC*, che divide il quadrilatero nei triangoli *ABC* e *ACD* (figura a lato).



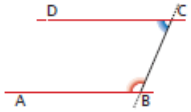
I triangoli *ABC* e *ACD* hanno:
- $AB \cong CD$ per ipotesi;
- $BC \cong AD$, sempre per ipotesi;
- *AC* in comune.

Quindi sono congruenti per il terzo criterio.

In particolare, sono congruenti gli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$, che sono alterni interni delle rette *AB* e *CD* tagliate dalla trasversale *AC*, *quindi AB* e *CD* sono parallele.

Anche gli angoli $D\hat{A}C$ e $A\hat{C}B$, che sono alterni interni delle rette *AD* e *BC* tagliate dalla trasversale *AC*, sono congruenti, *quindi* anche *AD* e *CB* sono parallele.
Dunque ABCD è un parallelogramma.

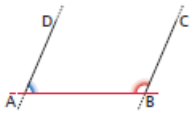
2. La somma degli angoli interni di un quadrilatero convesso è congruente a due angoli piatti, *quindi* $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} \cong 2\hat{P}$.



a

La somma degli angoli $\hat{A}$ e $\hat{D}$ è congruente alla somma degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$, perché somme di angoli congruenti, *quindi* $\hat{A} + \hat{D} \cong \hat{P}$ e $\hat{B} + \hat{C} \cong \hat{P}$. *Pertanto* $\hat{B}$ e $\hat{C}$ sono supplementari, così come $\hat{A}$ e $\hat{D}$.

Gli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$, supplementari, sono coniugati interni delle rette *AB* e *CD* tagliate dalla trasversale *BC*, *quindi AB* risulta parallela a *CD* (figura *a*).



b

Anche gli angoli $\hat{A}$ e $\hat{B}$, supplementari, sono coniugati interni delle rette *AD* e *BC* tagliate dalla trasversale *AB*, *quindi AD* è parallela a *BC* (figura *b*).

3. I triangoli *AMD* e *BMC* (figura *c*) hanno:
- $AM \cong MC$ per ipotesi;
- $DM \cong MB$ per ipotesi;
- $A\hat{M}D \cong B\hat{M}C$ perché opposti al vertice.

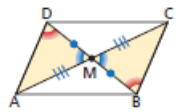
Quindi sono congruenti per il primo criterio.

In particolare, sono congruenti gli angoli $A\hat{D}B$ e $D\hat{B}C$, i quali sono alterni interni delle rette *AD* e *BC*, tagliate dalla trasversale *BD*. *Pertanto AD* e *BC* sono parallele.

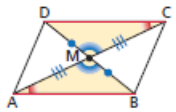
Ragionando allo stesso modo sui triangoli *ABM* e *DCM*, si conclude che anche *AB* e *CD* sono parallele (figura *d*).

4. Tracciamo la diagonale *AC* (figura *e*). Gli angoli $B\hat{A}C$ e $A\hat{C}D$ sono alterni interni delle parallele *AB* e *CD* tagliate dalla trasversale *AC*, *quindi* sono congruenti.
I triangoli *ABC* e *ACD* hanno:
- $AB \cong CD$ per ipotesi;
- *AC* in comune per costruzione;
- $B\hat{A}C \cong A\hat{C}D$ per la deduzione precedente.

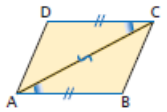
Quindi sono congruenti per il primo criterio.
In particolare, sono congruenti gli angoli $A\hat{C}B$ e $D\hat{A}C$.
Gli angoli congruenti $A\hat{C}B$ e $D\hat{A}C$ sono alterni interni delle rette *AD* e *BC* tagliate dalla trasversale *AC* (figura *f*), *quindi AD* e *BC* risultano parallele.



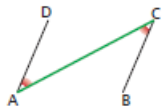
c



d



e



f