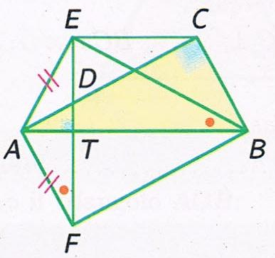
QUADRILATERI INSCRITTIBILI

6 È dato il triangolo isoscele ABC, ottusangolo in A. Indicato con P un punto di AC, sia R il punto in cui l'asse del segmento PC interseca BC. Dimostra che il quadrilatero $ABRP$ è inscrittibile in una circonferenza.

7 Siano AB e AC due corde di una circonferenza di centro O situate da parti opposte rispetto al diametro AF. Dimostra che il quadrilatero che ha per vertici A, O e i punti medi delle corde AB e AC è inscrittibile in una circonferenza che ha per centro il punto medio di AO.

8 In relazione alla figura, indica quali tra i seguenti quadrilateri sono inscrittibili in una circonferenza.



a. $TDCB$ ☐
b. $ADBF$ ☐
c. $AECB$ ☐
d. $TECB$ ☐
e. $AEBF$ ☐
f. $AFBC$ ☐

9 Dimostra che il quadrilatero $PMON$ che ha per vertici il centro O di una circonferenza, un punto P esterno ad essa e i punti M e N di intersezione delle tangenti condotte da P alla circonferenza con la circonferenza stessa, è inscrittibile in una circonferenza. Qual è il centro della circonferenza circoscritta a $PMON$?

10 Siano γ e γ_1 due circonferenze secanti nei punti A e B. Da A conduci una retta che interseca γ in T e γ_1 in Q. Da B conduci una retta che interseca γ in R e γ_1 in S. Dimostra che:

a. $T\hat{R}B \cong B\hat{A}Q$;
b. TR e QS sono parallele.

11 Nel triangolo ABC siano CH l'altezza relativa ad AB, HK e HS le altezze dei triangoli CAH e CHB. Dimostra che il quadrilatero $CSHK$ è inscrittibile in una circonferenza.

12 Siano a e b due rette parallele. Una trasversale t interseca a in A e b in B. Le bisettrici degli angoli alterni interni si intersecano in E e F. Dimostra che il quadrilatero $AEBF$ è inscrittibile in una circonferenza e determina il suo centro.

13 Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Le tre altezze CH, AK e BS si intersecano in G. Dimostra che i quadrilateri $AHGS$ e $HGKB$ sono inscrittibili in due circonferenze. Indicati con O e T i centri delle due circonferenze, dimostra che il quadrilatero $SOTK$ è un trapezio isoscele inscrittibile in una circonferenza.

14 Sia BH l'altezza relativa all'ipotenusa AC del triangolo rettangolo ABC. Da H conduci le altezze HK e HR dei triangoli ABH e BCH relative ad AB e BC e prolungale di due segmenti $TK \cong HK$ e $QR \cong HR$. Dimostra che:

a. il quadrilatero $HKBR$ è inscrittibile in una circonferenza;
b. i quadrilateri $HBQC$ e $AHBT$ sono inscrittibili in una circonferenza;
c. T, B e Q sono allineati;
d. TQ è tangente alla circonferenza di diametro AC.

15 Dimostra che i vertici B e C di un triangolo e i piedi delle altezze condotte dai vertici C e B sono vertici di un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza.

16 È dato il triangolo isoscele ABC, ottusangolo in A. Indicato con P un punto di AC, sia R il punto in cui l'asse del segmento PC interseca BC. Dimostra che il quadrilatero $BAPR$ è inscrittibile in una circonferenza.

17 Dimostra che, se i punti di intersezione delle bisettrici degli angoli di un trapezio isoscele sono vertici di un quadrilatero, questo è inscrittibile in una circonferenza.

18 Sia ABC un triangolo isoscele di base BC, siano AM, BH e CK le altezze relative ai lati BC, AC e AB e sia O l'ortocentro del triangolo. Dimostra che:

a. il quadrilatero $AKOH$ è inscrittibile in una circonferenza che ha centro nel punto medio N di AO;

b. MK e MH sono tangenti a tale circonferenza.

19 Siano γ e γ_1 due circonferenze di centri O e O' secanti nei punti A e B. Da B conduci una retta che interseca γ in T e γ_1 in Q. Da T conduci la tangente a γ e da Q la tangente a γ_1. Le due tangenti si intersecano in R. Dimostra che:

a. $O\widehat{T}A \cong O'\widehat{Q}A$;

b. il quadrilatero $ATRQ$ è inscrittibile in una circonferenza.

20 Sia BH l'altezza relativa all'ipotenusa AC del triangolo rettangolo ABC. Da H conduci le altezze HK e HR dei triangoli ABH e BCH relative ad AB e BC e prolungale di due segmenti $TK \cong HK$ e $QR \cong HR$. Dimostra che:

a. il quadrilatero $HKBR$ è inscrittibile in una circonferenza;

b. i quadrilateri $HBQC$ e $AHBT$ sono inscrittibili in una circonferenza;

c. T, B e Q sono allineati;

d. TQ è tangente alla circonferenza di diametro AC.

21 Da un punto T del diametro AB di una semicirconferenza conduci la perpendicolare ad AB che interseca la semicirconferenza in K. Da un punto R dell'arco $\widehat{KB}$ conduci la tangente alla semicirconferenza che interseca TK in P. Le rette BR e AR intersecano TK rispettivamente in S e D. Dimostra che:

a. il quadrilatero $BTDR$ è inscrittibile in una circonferenza;

b. il quadrilatero $ATRS$ è inscrittibile nella circonferenza di diametro AS.

Dal punto D conduci poi la perpendicolare ad AS in E. Dimostra che il quadrilatero $ESRD$ è inscrittibile in una circonferenza di centro P e che $EP \cong RP$.

22 Dimostra che i vertici B e C di un triangolo e i piedi delle altezze condotte dai vertici C e B sono vertici di un quadrilatero inscrittibile in una circonferenza.

23 Considera il triangolo ABC con il lato AB coincidente con un diametro di una circonferenza e il vertice C esterno ad essa. Detti D ed E i punti d'intersezione della circonferenza con i lati AC e BC, dimostra che il punto d'incontro delle diagonali del quadrilatero inscritto $ABED$ coincide con l'ortocentro del triangolo ABC.

24 Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di basi AB e DC inscritto in una circonferenza di centro O. Dimostra che le bisettrici degli angoli $A\widehat{C}B$ e $D\widehat{A}C$ intersecano la circonferenza in due punti R e S che sono gli estremi di un diametro.

25 Sia $ABCD$ un quadrilatero inscritto in una circonferenza, tale che le rette contenenti due coppie di lati opposti AB, CD e AC, BD si incontrino nei punti M e N. Dimostra che le bisettrici degli angoli $A\widehat{M}C$ e $A\widehat{N}B$ sono perpendicolari.

26 Data una circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O, prolunga una corda AB di due segmenti BC e AD tra loro congruenti. Conduci da D una retta DF secante la circonferenza la cui parte esterna è DE e considera sul prolungamento di DF un punto R tale che $FR \cong DE$. Dimostra che la circonferenza circoscritta al triangolo DCR è concentrica alla circonferenza $\mathcal{C}$.

3 Poligoni circoscritti a una ci

10 Siano AB e AC due corde di una circonferenza di centro O situate da parti opposte rispetto al diametro AF. Dimostra che il quadrilatero che ha per vertici A, O e i punti medi delle corde AB e AC è inscrittibile in una circonferenza che ha per centro il punto medio di AO.

11 Dimostra che il quadrilatero $PMON$, che ha per vertici il centro O di una circonferenza, un punto P esterno ad essa e i punti M e N di intersezione delle tangenti condotte da P alla circonferenza con la circonferenza stessa, è inscrittibile in una circonferenza. Qual è il centro della circonferenza circoscritta a $PMON$?

12 Siano γ e γ_1 due circonferenze secanti nei punti A e B. Da A conduci una retta che interseca γ in T e γ_1 in Q. Da B conduci una retta che interseca γ in R e γ_1 in S. Dimostra che:

a. $T\widehat{R}B \cong B\widehat{A}Q$; **b.** TR e QS sono parallele.

13 Dimostra che, se un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha un angolo retto, allora il centro della circonferenza appartiene a una diagonale del quadrilatero.

14 Sia P il punto medio dell'arco $\widehat{AB}$ di una circonferenza. Conduci da P due corde PR e PS che intersecano la corda AB rispettivamente in H e K in modo che H sia punto interno ad AK. Dimostra che:

a. $P\widehat{R}B \cong P\widehat{B}A$;

b. $P\widehat{R}S \cong S\widehat{P}B + P\widehat{B}A$;

c. il quadrilatero $RSKH$ è inscrittibile in una circonferenza.

15 Dimostra che, se le diagonali di un quadrilatero inscritto in una circonferenza sono perpendicolari, allora esse individuano sulla circonferenza quattro archi tali che la somma di due di essi non consecutivi risulta congruente alla semicirconferenza.

16 Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Le tre altezze CH, AK e BS si intersecano in G. Dimostra che i quadrilateri $AHGS$ e $HGKB$ sono inscrittibili in due circonferenze. Indicati con O e T i centri delle due circonferenze, dimostra che il quadrilatero $SOTK$ è inscrittibile in una circonferenza.

QUADRILATERI CIRCOSCRIVIBILI

22 Sia $ABCD$ un trapezio di basi AB e CD circoscritto a una circonferenza di centro O. Dimostra che i triangoli COB e DOA sono rettangoli.

23 Sui lati AB e AC del triangolo isoscele ABC di base BC, considera due punti M e N tali che $BM \cong CN$. Se O è il punto medio di BC, dimostra che il quadrilatero $AMON$ è circoscrittibile a una circonferenza.

24 Siano M e N i punti medi dei lati obliqui di un triangolo isoscele ABC, di cui il lato obliquo è triplo della metà della base AB. Dimostra che il quadrilatero $AMNB$ è circoscrittibile a una circonferenza.

25 La circonferenza inscritta nel triangolo ABC interseca il lato AB nel punto P. Sul prolungamento di AC prendi un punto R tale che $CR \cong BP$. Conduci poi da B la parallela ad AC che interseca in Q la parallela a BC condotta da R. Dimostra che il quadrilatero $ABQR$ è circoscrittibile a una circonferenza.

26 Dimostra che la base maggiore di un trapezio circoscritto a una semicirconferenza è congruente alla somma dei lati obliqui.

35 Sia $ABCD$ un trapezio di basi AB e CD circoscritto a una circonferenza di centro O. Dimostra che i triangoli COB e DOA sono rettangoli.

36 Sui prolungamenti della diagonale AC di un rombo, e da parti opposte, si considerino due punti qualsiasi M e N. Dimostra che il quadrilatero $BMDN$ è circoscrittibile a una circonferenza.

37 Siano AK e BS le bisettrici degli angoli alla base AB di un triangolo isoscele ABC e sia O l'incentro. Dimostra che:

a. il quadrilatero $OSCK$ è circoscrittibile a una circonferenza;

b. il quadrilatero $ABKS$ è inscrittibile in una circonferenza.

38 Siano M e N i punti medi dei lati obliqui di un triangolo isoscele ABC, di cui il lato obliquo è triplo della metà della base AB. Dimostra che il quadrilatero $AMNB$ è circoscrittibile a una circonferenza.

39 La circonferenza inscritta nel triangolo ABC interseca il lato AB nel punto P. Sul prolungamento di AC prendi un punto R tale che $CR \cong BP$. Conduci poi da B la parallela ad AC che interseca in Q la parallela a BC condotta da R. Dimostra che il quadrilatero $ABQR$ è circoscrittibile a una circonferenza.

40 Sia $ABCD$ un trapezio isoscele di base maggiore AB circoscritto a una circonferenza di centro O. La retta BO è perpendicolare ad AD. Dimostra che DOC è un triangolo equilatero.

41 Dimostra che in un trapezio isoscele circoscritto a una circonferenza il lato obliquo è congruente al segmento congiungente i punti medi dei lati obliqui.

POLIGONI REGOLARI

44 Sia $ABCDEF$ un esagono regolare. Dimostra che la diagonale FB viene divisa dalle diagonali AE e AC in tre parti congruenti e che l'angolo $E\widehat{A}B$ è retto.

45 Siano $ABCDEF$ un esagono regolare e K il punto d'intersezione delle rette dei lati FA e CB. Dimostra che ABK è un triangolo equilatero.

46 Sui lati di un triangolo equilatero ABC, ed esternamente ad esso, si costruiscano tre triangoli equilateri e siano M, N e P i loro centri. Dimostra che MNP è un triangolo equilatero congruente ad ABC.

47 $ABCD$ è un quadrato inscritto in una circonferenza di centro O. Siano M, N, P e Q i punti medi degli archi $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$ e $\widehat{DA}$. Dimostra che $AMBNCPDQ$ è un ottagono regolare.

48 Dimostra che le diagonali uscenti da un vertice di un poligono regolare dividono l'angolo del poligono relativo a quel vertice in parti uguali. Quanto vale la misura in gradi di ciascuna di queste parti se il poligono ha n lati?

49 Disegna esternamente a ogni lato di un esagono regolare un quadrato di lato congruente al lato dell'esagono. Dimostra che, congiungendo i vertici dei quadrati che non appartengono all'esagono, si ottiene un dodecagono regolare.

50 Sia $ABCDE$ un pentagono regolare: sui lati AB, BC, CD, DE ed EA prendi rispettivamente i cinque segmenti

$AM \cong BN \cong CP \cong DT \cong EQ$.

Dimostra che $MNPTQ$ è un pentagono regolare.

51 Siano AC e BD due diametri perpendicolari di una circonferenza di centro O. Dimostra che A, B, C e D sono i vertici di un quadrato.

52 Dimostra che il lato di un esagono regolare è congruente al raggio della circonferenza circoscritta all'esagono.

53 Dimostra che il raggio del cerchio circoscritto a un triangolo equilatero è il doppio del raggio del cerchio inscritto.

54 Dimostra che l'esagono $MNTQRS$ che si ottiene congiungendo i punti medi dei lati dell'esagono regolare $ABCDEF$ è regolare. Dimostra inoltre che il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta a $MNTQRS$ coincide con il centro delle circonferenze inscritta e circoscritta ad $ABCDEF$.

55 Dimostra che le rette dei lati AF, BC ed ED dell'esagono regolare $ABCDEF$ intersecandosi formano un triangolo equilatero.