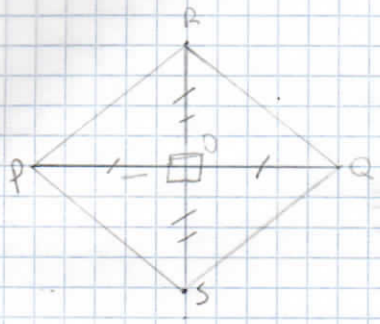


Hp: $RO \cong OS$ $PQ \perp RS$
$PO \cong OQ$
$P\hat{O}R \cong R\hat{O}Q \cong Q\hat{O}S \cong S\hat{O}P \cong \frac{\pi}{2}$

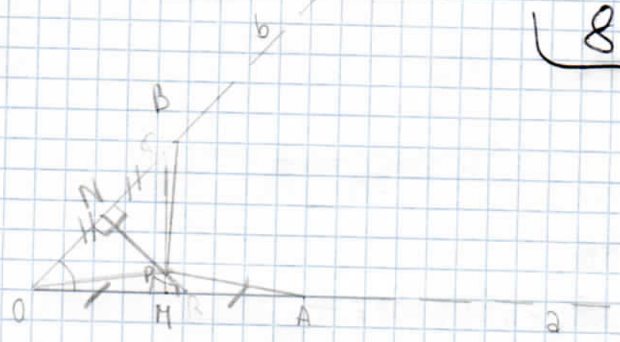
Th: $PR \cong RQ \cong QS \cong SP$

Dimostrazione

Considero $P\hat{O}R$, $R\hat{O}Q$, $Q\hat{O}S$ e $S\hat{O}P$. Essi hanno:
1) $PO \cong OQ \cong OQ \cong PO$ per Hp;
2) $RO \cong OS \cong OS \cong RO$ per Hp;
3) $P\hat{O}R \cong R\hat{O}Q \cong Q\hat{O}S \cong S\hat{O}P$ per Hp;

I quattro triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.
In particolare ad angol. congruenti si oppongono lati congruenti, quindi:
$PR \cong RQ \cong QS \cong SP$.

8



Hp: $OM \cong MA$

$ON \cong BN$

$O\hat{N}P \cong P\hat{N}O \cong \frac{\pi}{2}$

$O\hat{M}P \cong M\hat{P}A \cong \frac{\pi}{2}$

Th: $BP \cong AP$

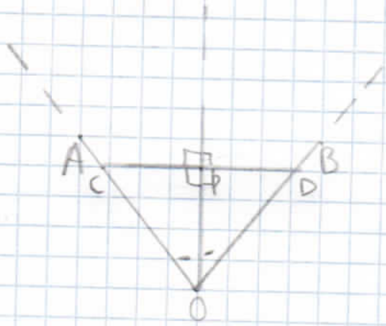
Dimostrazione

Congiungo P con O e considero $O\hat{P}A$. In $O\hat{P}A$, PM è sia mediana che altezza, quindi il triangolo è isoscele, quindi $OP \cong PA$.

Considero $P\hat{B}O$. In $P\hat{B}O$, PN è sia mediana che altezza, quindi $P\hat{B}O$ è isoscele, quindi $PB \cong OP$.

Per transitività $AP \cong PO \cong BP$, $AP \cong BP$

9



Hp: $A\hat{O}P \cong P\hat{O}B$

$C\hat{P}O \cong O\hat{P}D \cong \frac{\pi}{2}$

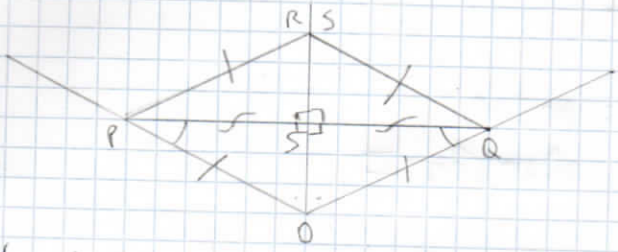
Th: $CP \cong PD$

Dimostrazione

Considero $C\hat{P}O$ e $O\hat{P}D$. Essi hanno:

1) OP in comune;
2) $C\hat{O}P \cong P\hat{O}D$ per Hp;
3) $C\hat{P}O \cong O\hat{P}D$ per costruzione;

I due triangoli sono congruenti per il secondo criterio di congruenza. In particolare, ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti, quindi $CP \cong PD$.



Hp: $OP \cong OQ$

$OQ \cong QR$

$P\hat{O}R \cong R\hat{O}Q$

Th: $PQ \perp OS$

$OP \cong PR \cong RQ \cong QO$

Dimostrazione

Considero $P\overset{\triangle}{S}O$ e $S\overset{\triangle}{O}Q$. Essi hanno:

1) OS in comune;

2) $OP \cong OQ$ per Hp;

3) $P\hat{O}S \cong S\hat{O}Q$ per Hp.

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.

In particolare a lati congruenti si oppongono angoli congruenti, quindi $P\hat{S}O \cong O\hat{S}Q$.

Osservo che $P\hat{S}Q \cong \pi$ quindi, poiché $P\hat{S}O \cong O\hat{S}Q$, $P\hat{S}Q$ è diviso a metà da SO.

Ma $P\hat{S}Q$ è piatto, quindi $P\hat{S}O$ e $O\hat{S}Q$ sono retti. Dunque $PQ \perp OS$

Considero $P\overset{\triangle}{S}R$ e $R\overset{\triangle}{S}Q$. Essi hanno:

1) SR in comune;

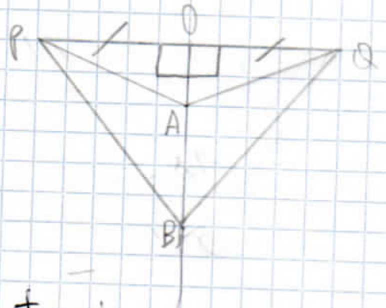
2) $P\hat{S}R \cong R\hat{S}Q$ perché retti;

3) $PS \cong SQ$ per precedente dimostrazione.

I due triangoli sono congruenti per il primo criterio di congruenza.

In particolare, ad angoli congruenti si oppongono lati congruenti, quindi $PS \cong SQ$.

Per transitività $OP \cong PR \cong RQ \cong QO$.



Hp: $PO \cong OQ$

$P\hat{O}A \cong A\hat{O}Q \cong \frac{\pi}{2}$

Th: $P\hat{A}B \cong B\hat{A}Q$

Dimostrazione

Considero $P\overset{\triangle}{B}Q$. In $P\overset{\triangle}{B}Q$, BO è sia mediana che altezza quindi $P\overset{\triangle}{B}Q$ è isoscele.

Considero $P\overset{\triangle}{A}Q$. In $P\hat{A}Q$, AO è sia mediana che altezza quindi $P\hat{A}Q$ è isoscele.

Considero $P\hat{A}B$ e $B\hat{A}Q$. Essi hanno:

1) AB in comune;
2) $PA \cong AQ$ perché lati obliqui del triangolo isoscele $P\hat{B}Q$
3) $PB \cong BQ$ perché lati obliqui del triangolo isoscele PAQ

I due triangoli sono congruenti per il terzo criterio di congruenza