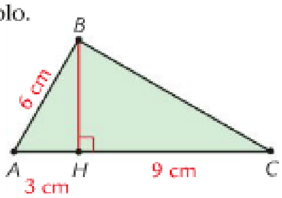
Problemi da risolvere per via aritmetica

4 Determina il perimetro di un rombo le cui diagonali sono lunghe 2 cm e 4 cm. [$4\sqrt{5}$ cm]

5 In un rombo di perimetro 20 cm, la diagonale maggiore è lunga 8 cm. Determina l'area del rombo. [24 cm^2]

6 Stabilisci se il triangolo ABC disegnato nella figura qui sotto è rettangolo.



7 Un quadrato è equivalente a un rettangolo in cui le diagonali sono lunghe $3\sqrt{17}$ cm e uno dei lati è lungo 3 cm. Determina il perimetro del quadrato. [24 cm]

8 In un triangolo rettangolo di area 25 cm^2, uno dei due cateti è lungo 5 cm. Determina il perimetro del triangolo. [$(15 + 5\sqrt{5})$ cm]

9 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, i lati obliqui misurano $2a\sqrt{5}$ e la base misura $4a$. Determina l'area del triangolo. [$8a^2$]

10 In un triangolo ABC, il lato AC è lungo 30 cm, il lato BC è lungo 40 cm e l'altezza relativa ad AB è lunga 24 cm. Determina perimetro e area del triangolo. [Perimetro = 120 cm; Area = 600 cm^2]

11 Le diagonali di un rombo sono lunghe 16 cm e 12 cm. Determina l'area del triangolo equilatero che ha lo stesso perimetro del rombo. $\left[\frac{400\sqrt{3}}{9}\ \text{cm}^2\right]$

13 In un parallelogramma $ABCD$ i lati AB e CD sono lunghi 6 cm, la diagonale maggiore AC è lunga 10 cm e l'area del parallelogramma è 36 cm^2. Determina il perimetro del parallelogramma e la lunghezza della diagonale minore. [Perimetro = $(12 + 4\sqrt{10})$ cm; diagonale minore $BD = 2\sqrt{13}$ cm]

14 In un trapezio rettangolo $ABCD$, di base maggiore $AB = 8$ cm e base minore $CD = 3$ cm, l'altezza è lunga 6 cm. Determina il perimetro e l'area del trapezio e la lunghezza delle diagonali. [Perimetro = $(17 + \sqrt{61})$ cm; Area = 33 cm^2; le diagonali sono lunghe 10 cm e $3\sqrt{5}$ cm]

15 In un triangolo isoscele ABC, i lati obliqui AC e BC sono lunghi 10 cm e la base AB è lunga 12 cm. Detti H, M e N, rispettivamente, i punti medi di AB, AC e di BC, determina l'area del triangolo MHN. [12 cm^2]

16 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, i lati obliqui sono lunghi 25 cm e la base AB è lunga 14 cm. Determina le lunghezze delle mediane del triangolo. $\left[24\ \text{cm}; \frac{3}{2}\sqrt{113}\ \text{cm};\ \frac{3}{2}\sqrt{113}\ \text{cm}\right]$

17 Determina il perimetro e le misure delle mediane di un triangolo isoscele, di area $48a^2$, sapendo che la base misura $16a$. [Perimetro = $36a$; mediane: $3a\sqrt{17}$, $3a\sqrt{17}$, $6a$]

18 Un trapezio isoscele è circoscritto a una circonferenza. Sapendo che la base maggiore AB misura $8r$ e la base minore CD misura $4r$, determina il perimetro e l'area del trapezio. [Perimetro = $24r$; Area = $24r^2\sqrt{2}$]

42 Il perimetro di un triangolo equilatero misura $18\sqrt{3}$ cm. Qual è il perimetro di un triangolo rettangolo equivalente, avente gli angoli acuti di 30° e 60°? [$9(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ cm]

43 Il perimetro di un esagono regolare è $12\,l$. Determina l'area dell'esagono. [$6l^2\sqrt{3}$]

44 In un trapezio $ABCD$, gli angoli adiacenti alla base maggiore AB sono di 60°. Inoltre la base maggiore AB è lunga 20 cm e la base minore CD è lunga 10 cm. Determina il perimetro e l'area del trapezio. [Perimetro = 50 cm; Area = $75\sqrt{3}$ cm^2]

45 In un trapezio $ABCD$, gli angoli adiacenti alla base maggiore AB sono di 30° e 45°. Sapendo che $\overline{AB} = (3 + \sqrt{3})a$ e che l'altezza del trapezio misura a, determina il perimetro e l'area del trapezio. $\left[\text{Perimetro} = 7a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3}; \text{Area} = \frac{(5+\sqrt{3})a^2}{2}\right]$

46 In un trapezio $ABCD$, gli angoli adiacenti alla base maggiore AB sono di 60° e 45°. Sapendo che sia la base minore sia l'altezza misurano a, determina il perimetro e l'area del trapezio. $\left[\text{Perimetro} = 3a + a\sqrt{2} + a\sqrt{3}; \text{Area} = \frac{(9+\sqrt{3})a^2}{6}\right]$

47 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, l'angolo $\widehat{C}$ è di 120°.
Determina il perimetro e l'area del triangolo, sapendo che la base AB misura $2l$.
(*Suggerimento*: traccia l'altezza CH e osserva che i triangoli AHC e BHC sono rettangoli e hanno gli angoli acuti di 30° e 60°)
$\left[\text{Perimetro} = 2l + \frac{4l\sqrt{3}}{3}; \text{Area} = \frac{l^2}{3}\sqrt{3}\right]$

48 Un trapezio $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB e raggio di misura r. Gli angoli adiacenti alla base maggiore AB hanno ampiezza uguale a $60°$. Determina il perimetro e l'area del trapezio.
(*Suggerimento*: dimostra preliminarmente che AOD e BOC sono triangoli equilateri) $\left[5r;\ \dfrac{3\sqrt{3}}{4}r^2\right]$

50 Nel triangolo ABC risulta $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = 2a$ e $B\hat{A}C = 120°$. Determina la misura di BC. $[a\sqrt{7}]$

51 Nel triangolo ABC risulta $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = 2a$ e $B\hat{A}C = 135°$. Determina la misura di BC. $[a\sqrt{5+2\sqrt{2}}]$

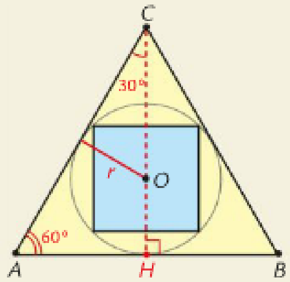
52 Nel triangolo ABC risulta $\overline{AB} = 6a$, $\overline{AC} = 3a$ e $B\hat{A}C = 120°$. Determina la misura di BC. $[3a\sqrt{7}]$

53 In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa $\overline{BC} = 2l$, l'angolo $\hat{C}$ è di $30°$. Sia BP la bisettrice dell'angolo $\hat{B}$. Determina la misura di CP. $\left[\dfrac{2l\sqrt{3}}{3}\right]$

54 In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, l'angolo $\hat{C}$ è di $30°$. Sapendo che $\overline{BC} = 2l$, determina le misure delle mediane del triangolo. $\left[l;\ \dfrac{l\sqrt{7}}{2};\ \dfrac{l\sqrt{13}}{2}\right]$

55 ESERCIZIO SVOLTO

Dato un cerchio di raggio r, calcoliamo il rapporto tra l'area del triangolo equilatero circoscritto al cerchio e l'area del quadrato inscritto nel cerchio.



- Fai riferimento alla figura qui a fianco. Abbiamo indicato con O il centro del cerchio (incentro del triangolo ABC).
- Dal momento che, in un triangolo equilatero, l'incentro coincide con il baricentro, possiamo dedurre che:

  $\overline{CH} = 3\overline{OH} = 3r$ Teorema 11.11
- Il triangolo rettangolo AHC ha gli angoli acuti di $30°$ e $60°$, quindi:

  $\overline{CH} = \sqrt{3}\,\overline{AH}$ Relazioni tra i lati di un triangolo con gli angoli di 30°, 60°, 90°

  $\overline{AH} = \dfrac{\overline{CH}}{\sqrt{3}} = \dfrac{3r}{\sqrt{3}} = r\sqrt{3}$ Dalle formule precedenti

  $\overline{AB} = 2\,\overline{AH} = 2r\sqrt{3}$ L'altezza di un triangolo isoscele è mediana
- Possiamo calcolare l'area di ABC quindi:

  $\text{Area }(ABC) = \dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{CH} = \dfrac{1}{2}\cdot 2r\sqrt{3}\cdot 3r = 3r^2\sqrt{3}$

  Sappiamo inoltre che il lato del quadrato inscritto in un cerchio di raggio r misura $r\sqrt{2}$, quindi l'area del quadrato inscritto nel cerchio è $(r\sqrt{2})^2 = 2r^2$.

  Infine:

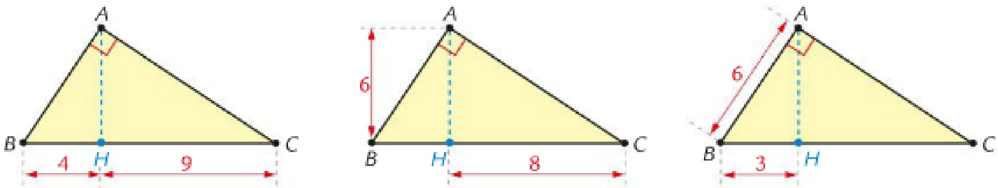
  rapporto tra le aree $= \dfrac{3r^2\sqrt{3}}{2r^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

56 Dato un cerchio di raggio r, determina il rapporto tra l'area del triangolo equilatero inscritto e l'area dell'esagono regolare inscritto. $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

57 Dato un cerchio di raggio r, determina il rapporto tra l'area del triangolo equilatero circoscritto al cerchio e l'area del triangolo equilatero inscritto nello stesso cerchio. $[4]$

EUCLIDE PER VIA ARITMETICA

60 Nei triangoli rettangoli rappresentati nelle seguenti figure sono note le misure, in cm, indicate in rosso. Determina le misure di tutti i lati e dell'altezza relativa all'ipotenusa, utilizzando soltanto i teoremi di Euclide.



61 In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano rispettivamente $\frac{25}{13}a$ e $\frac{144}{13}a$.
Determina le misure dei lati del triangolo e la sua area.
[$5a$, $12a$, $13a$; Area $= 30a^2$]

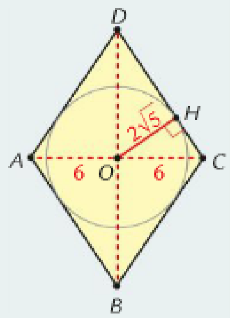
62 In un triangolo rettangolo di area 40 cm^2, l'ipotenusa è lunga 20 cm. Determina l'area del rettangolo che ha i lati congruenti alle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[16 cm^2]

63 La circonferenza inscritta in un rombo è tangente a uno dei lati del rombo in un punto che divide il lato stesso in due segmenti di misura a e b. Esprimi in funzione di a e b la misura del raggio della circonferenza inscritta.
[$r = \sqrt{ab}$]

64 In un trapezio rettangolo $ABCD$, di base maggiore AB, la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC. La diagonale AC è lunga $3\sqrt{5}$ cm e la base minore CD è lunga 3 cm. Determina il perimetro e l'area del trapezio.
[Perimetro $= (24 + 6\sqrt{5})$ cm; Area $= 54$ cm^2]

65 ESERCIZIO GUIDATO

In un rombo, il raggio del cerchio inscritto è lungo $2\sqrt{5}$ cm e la diagonale minore è lunga 12 cm. Determina il perimetro del rombo.



- Applica il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo OHC per calcolare $\overline{CH}$:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{OH}^2} = \dots\dots$$

- Applica ora il teorema di Euclide al triangolo ODC per calcolare $\overline{CD}$:

$$\overline{OC}^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CH} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{\overline{OC}^2}{\overline{CH}} = \dots\dots$$

- Puoi concludere che il perimetro del rombo è ...... [36 cm]

66 Sia $ABCD$ un rettangolo. Siano H e K, rispettivamente, le proiezioni di B e D sulla diagonale AC del rettangolo. Sapendo che $\overline{HK} = 3a$ e che $\overline{AK} = \overline{CH} = a$, determina il perimetro e l'area del rettangolo. [Perimetro $= 6a\sqrt{5}$; Area $= 10a^2$]

67 Sia $ABCD$ un rettangolo in cui $AB = 16$ cm e $BC = 8$ cm. Siano He K, rispettivamente, le proiezioni di D e B sulla diagonale AC del rettangolo. Determina la lunghezza di HK.
$\left[HK = \frac{24\sqrt{5}}{5} \text{ cm}\right]$

68 In un trapezio isoscele ciascuna diagonale è perpendicolare al lato obliquo e ha lunghezza di 8 cm. Sapendo che l'altezza del trapezio è 4,8 cm, determina il perimetro del trapezio. [24,8 cm]

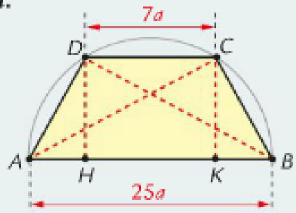
69 Di un triangolo rettangolo si conoscono la misura di un cateto, che è a, e la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa, che è h. Determina il perimetro del triangolo.
$\left[a\left(1 + \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{a - h}\right)\right]$

70 In un triangolo rettangolo ABC, l'ipotenusa BC è lunga 20 cm e il cateto AC è lungo 12 cm. Traccia l'altezza AH relativa a BC e determina il perimetro dei due triangoli AHC e AHB. [38,4 cm; 28,8 cm]

71 Dato un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Traccia poi l'altezza HK del triangolo rettangolo AHC relativa ad AC. Sapendo che $HB = 16$ cm e $HC = 9$ cm, determina il perimetro del trapezio $ABHK$.
[52,8 cm]

72 ESERCIZIO GUIDATO

Un trapezio isoscele *ABCD* è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 25a$. Sapendo che $\overline{CD} = 7a$, determina il perimetro e l'area del trapezio.



- Traccia le diagonali del trapezio e le altezze *DH* e *CK*.
- Puoi subito ricavare le misure di *AH* e *HB*:

$$\overline{AH} = \overline{BK} = \frac{\overline{AB} - \overline{HK}}{2} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots \text{ e } \overline{HB} = \ldots\ldots$$

- Osserva che i triangoli *ABD* e *ABC* sono rettangoli perché ...., quindi puoi applicare i teoremi di Euclide:

$\overline{AD}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{AB} \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{AB}} = \ldots\ldots$ Primo teorema di Euclide applicato al triangolo *ADB*

$\overline{DH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} \Rightarrow \overline{DH} = \sqrt{\overline{AH} \cdot \overline{HB}} = \ldots\ldots$ Secondo teorema di Euclide applicato al triangolo *ADB*

- Ora puoi concludere:

Perimetro $(ABCD) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Area $(ABCD) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ [Perimetro $= 62a$; Area $= 192a^2$]

73 Un triangolo *ABC*, isoscele sulla base *AB*, è inscritto in una circonferenza di raggio *r*. Sapendo che l'altezza relativa ad *AB* misura $\frac{9}{5}r$, determina il perimetro e l'area del triangolo. $\left[\text{Perimetro} = \frac{6r(1+\sqrt{10})}{5}; \text{ Area} = \frac{27}{25}r^2\right]$

74 In un trapezio isoscele $ABCD$, inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, le diagonali misurano $\dfrac{\sqrt{15}}{2}r$. Determina le misure dei lati del trapezio. $\left[2r; \dfrac{r}{2}; \dfrac{r}{2}; \dfrac{7}{4}r\right]$

75 Da un punto P, esterno a una circonferenza di raggio r, traccia le tangenti PA e PB alla circonferenza, essendo A e B i punti di contatto.
Determina le misure dei segmenti di tangenza PA e PB, sapendo che $\overline{AB} = \dfrac{6}{5}r$. $\left[\overline{PA} = \overline{PB} = \dfrac{3}{4}r\right]$

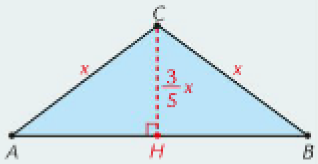
76 La misura del lato di un quadrato $ABCD$ è $2a$. Traccia la semicirconferenza di diametro AB esterna al quadrato e considera su di essa il punto P tale che, detta H la proiezione di P su AB, sia $\overline{HB} = \dfrac{1}{2}a$. Determina il valore della somma $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$. $[(16 + 4\sqrt{3})a^2]$

Problemi geometrici risolvibili per via algebrica

Aree e teorema di Pitagora

89 ESERCIZIO GUIDATO

In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, l'altezza relativa ad AB è $\dfrac{3}{5}$ del lato obliquo. Determina l'area del triangolo, sapendo che il suo perimetro è 36 cm.



- Individua i dati e l'obiettivo.
- Indica con x la misura (in centimetri) del lato obliquo del triangolo; dovrà essere $x > 0$.
- Esprimi in funzione di x le misure di tutti i lati del triangolo e imponi che il perimetro del triangolo misuri 36.

$\overline{AC} = \overline{BC} = x$ Per come è stata scelta l'incognita

$\overline{AB} = 2\overline{HB} = 2\sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CH}^2} =$ Teorema di Pitagora applicato al triangolo BHC

$= 2\sqrt{x^2 - \dfrac{9}{25}x^2} = 2\sqrt{\dfrac{\dots}{25}x^2} = 2 \cdot \dfrac{\dots}{5}x = \dfrac{\dots}{5}x$

Allora l'equazione che costituisce il modello algebrico del problema è:

$$\underbrace{x}_{\text{Misura di } AC} + \underbrace{\dots}_{\text{Misura di } BC} + \underbrace{\frac{\dots}{5}x}_{\text{Misura di } AB} = \underbrace{36}_{\text{Perimetro di } ABC}$$

- Risolvendo tale equazione ricavi che $x = \dots$
  Tale soluzione è accettabile ai fini del problema, in quanto è positiva.
- Le lunghezze di AB e CH sono dunque .... e l'area del triangolo è ...... $[48\ \text{cm}^2]$

90 In un rombo di area 36 cm^2 una diagonale è doppia dell'altra. Qual è il perimetro del rombo? $[12\sqrt{5}\ \text{cm}]$

91 Un rettangolo, equivalente a un quadrato di lato 12 cm, ha la base che è $\dfrac{4}{9}$ dell'altezza. Determina la lunghezza delle diagonali del rettangolo. $[2\sqrt{97}\ \text{cm}]$

92 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, i lati obliqui sono i $\dfrac{5}{8}$ della base.
Sapendo che l'area del triangolo è 108 cm^2, determina il perimetro. [54 cm]

93 In un triangolo isoscele ABC, l'altezza relativa alla base AB è $\dfrac{6}{5}$ della base. Determina l'area del triangolo, sapendo che il perimetro è 36 cm. $[60\ \text{cm}^2]$

94 In un trapezio rettangolo $ABCD$, la diagonale maggiore è $\dfrac{5}{4}$ della base maggiore AB e la base minore CD è congruente all'altezza.
Sapendo che l'area del trapezio è 42 cm^2, determina il perimetro. $[(20 + 2\sqrt{10})\ \text{cm}]$

95 In un rettangolo, la base è $\dfrac{4}{5}$ della diagonale. Sapendo che il perimetro è 70 cm, determina l'area. $[300\ \text{cm}^2]$

96 In un rettangolo $ABCD$, il lato AB è lungo 12 cm e la diagonale supera di 6 cm l'altro lato. Determina perimetro e area del rettangolo. [42 cm; 108 cm^2]

97 Un trapezio isoscele ha l'area di 51 cm^2. L'altezza e la base maggiore superano la base minore, rispettivamente, di 1 cm e di 7 cm. Determina il perimetro del trapezio. [$(17+\sqrt{193})$cm]

98 In un trapezio isoscele $ABCD$, di perimetro 20 cm, l'altezza è lunga 4 cm e la base maggiore AB è il quadruplo della base minore CD. Determina le lunghezze dei lati del trapezio. [8 cm, 2 cm, 5 cm, 5 cm]

99 In un trapezio $ABCD$ la base maggiore AB misura $11a$, la base minore CD misura $6a$, i lati obliqui BC e AD misurano, rispettivamente $2a\sqrt{5}$ e $5a$. Determina l'area del trapezio e la misura delle sue diagonali.
[Area $= 34a^2$; diagonali: $a\sqrt{97}$, $4a\sqrt{5}$]

100 In un trapezio rettangolo $ABCD$, di base maggiore AB e base minore CD, l'altezza AD misura $3a$, il lato obliquo BC misura $5a$ e l'area vale $24a^2$. Determina:
a. le misure delle basi del trapezio;
b. un punto P sul lato AD in modo che risulti:
$\overline{PB}^2 - 2\overline{PC}^2 = 30a^2$
[**a.** $\overline{AB} = 10a$, $CD = \overline{6a}$; **b.** $\overline{AP} = 2a$]

101 In un trapezio rettangolo $ABCD$, avente perimetro 48 cm, l'altezza AD è $\frac{3}{5}$ del lato obliquo BC e la base minore CD è il doppio dell'altezza. Determina:
a. le misure dei lati del trapezio $ABCD$;
b. le misure dei lati del rettangolo $PQRS$, equivalente al trapezio, sapendo che il lato PQ supera di 10 cm il lato QR. [**a.** $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, $CD = 12$ cm, $AD = 6$ cm; **b.** $PQ = 16$ cm, $QR = 6$ cm]

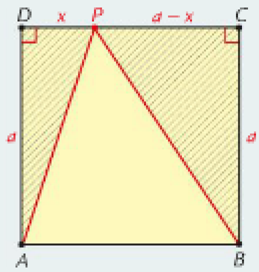
102 In un parallelogramma $ABCD$, il lato obliquo è $\frac{5}{4}$ dell'altezza. Inoltre, detta H la proiezione di D su AB e K la proiezione di B su CD, il quadrilatero $HBKD$ è un quadrato. Sapendo che l'area del parallelogramma è 28 cm^2, determina il suo perimetro e la lunghezza delle diagonali.
[Perimetro = 24 cm;
le diagonali sono lunghe $4\sqrt{2}$ cm e $2\sqrt{29}$ cm]

103 In una circonferenza di centro O e raggio di misura $10a$, la somma della misura di una corda AB e della sua distanza dal centro è uguale a $22a$. Determina la misura della corda AB.
[Indicata con x la distanza della corda dal centro, si ottiene l'equazione $x + 2\sqrt{100a^2 - x^2} = 22a$. Il problema ammette due soluzioni:
$\overline{AB} = 16a$ oppure $\overline{AB} = \frac{96}{5}a$]

104 ESERCIZIO GUIDATO

Sia $ABCD$ un quadrato il cui lato misura a. Determina un punto P, sul lato CD, in modo che risulti:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \frac{21}{8}a^2$$



- Individua i dati e l'obiettivo.
- Osserva che la posizione di P resta univocamente determinata una volta che si conosce, per esempio, la distanza di P da D. Poni quindi:

  $\overline{PD} = x$

  Qual è il dominio di variabilità di x?
- Esprimi in funzione di x i quadrati delle misure dei segmenti PA e PB, in modo da poter tradurre la relazione $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \frac{21}{8}a^2$ in un'equazione:

  $\overline{PA}^2 = \overline{PD}^2 + \overline{AD}^2 = x^2 + a^2$ Teorema di Pitagora applicato al triangolo PAD

  $\overline{PB}^2 = \overline{PC}^2 + \overline{BC}^2 = (\ldots\ldots)^2 + \ldots\ldots$ Teorema di Pitagora applicato al triangolo PBC

  La relazione che deve soddisfare P si traduce quindi nell'equazione:

  $$\underbrace{\ldots\ldots + \ldots\ldots}_{\overline{PA}^2} + \underbrace{\ldots\ldots + \ldots\ldots}_{PB^2} = \frac{21}{8}a^2$$

- Risolvendo l'equazione trovi come soluzioni ...... e ....
- Stabilisci se tali soluzioni sono accettabili e rispondi al problema. $\left[\overline{PD} = \frac{1}{4}a \lor \overline{PD} = \frac{3}{4}a\right]$

105 In un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, risulta $\overline{AB} = 9a$ e $\overline{AC} = 8a$. Determina un punto P sul cateto AB e un punto Q sul cateto AC, in modo che risulti $BP \cong PQ \cong QC$. [Posto $\overline{PB} = \overline{QC} = x$, si trova che $x = 5a$]

106 In un rettangolo $ABCD$, $AB = 8$ cm e $BC = 6$ cm. Determina due punti P e Q, rispettivamente su AB e CD, in modo che il quadrilatero $APCQ$ sia un rombo. Determina inoltre la lunghezza di PQ.
[$AP = CQ = 6{,}25$ cm; $PQ = 7{,}5$ cm]

107 Data una semicirconferenza AB di centro O e raggio r, traccia la tangente t in B alla semicirconferenza. Determina un punto P, su tale tangente, in modo che, detto Q il punto in cui OP incontra la semicirconferenza, risulti $BP \cong 3PQ$.
$\left[\overline{PB} = \frac{3}{4}r\right]$

108 In un semicerchio di raggio 2,5 cm è inscritto un rettangolo (non degenere) di perimetro 10 cm. Determina le lunghezze dei lati del rettangolo. [3 cm, 2 cm]

109 Dato un quadrato $ABCD$, il cui lato AB misura $2a$, sia O il punto di intersezione delle sue diagonali. Determina un punto P sul segmento AO, in modo che detta H la proiezione di P su AB, la somma delle aree dei triangoli POD e AHP sia uguale all'area di un rettangolo avente la base congruente ad AB e l'altezza congruente ad AH.
[Ponendo $\overline{AH} = x$, con $0 \leq x \leq a$, si giunge all'equazione $x^2 - 6ax + 2a^2 = 0$;
l'unica soluzione accettabile in relazione al problema è $x = (3 - \sqrt{7})a$]

110 Sia $ABCD$ un rettangolo, in cui $\overline{AB} = 4a$ e $\overline{BC} = 2a$. Determina un punto P sul lato AB e un punto Q sul lato BC in modo che risulti $\overline{AP} = 2\overline{CQ}$ e $\overline{PQ} = \frac{1}{2}a\sqrt{5}$. $\left[\overline{AP} = 3a,\ \overline{CQ} = \frac{3}{2}a\right]$

111 Due corde parallele AB e CD, di una circonferenza di centro O, sono situate da parti opposte rispetto ad O. La corda AB misura $4a$, la corda CD misura $2a$ e la distanza delle due corde è $4a$. Determina la distanza della corda AB da O e la misura del raggio della circonferenza. $\left[\frac{13}{8}a;\ \frac{5}{8}a\sqrt{17}\right]$

112 In un triangolo rettangolo ABC (non degenere), di ipotenusa BC, la mediana CM relativa ad AB misura 2 cm in meno di AB e 2 cm in più di AC. Determina il perimetro del triangolo. [$(20 + 4\sqrt{13})$ cm]

113 Sia AOB un quadrante di un cerchio di centro O e raggio r. Determina un punto P, sull'arco $\widehat{AB}$, in modo che risulti $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \frac{6}{5}r^2$.
[Detta H la proiezione di P su OA e K la proiezione di P su OB, poniamo $\overline{PK} = x$ e $\overline{PH} = y$;
si trovano le soluzioni $x = \frac{3}{5}r$, $y = \frac{4}{5}r$ oppure $x = \frac{4}{5}r$, $y = \frac{3}{5}r$]

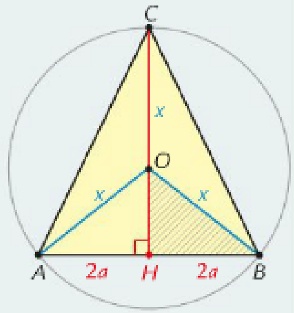
114 Considera un rettangolo $ABCD$, in cui $\overline{AB} = 2r$ e $\overline{BC} = r$. Chiama E il punto medio di AB e traccia l'arco di circonferenza che ha centro in A e come estremi i punti D ed E. Determina su tale arco un punto P, in modo che risulti:

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 8r^2$$

[Indicate con H e K le proiezioni di P su AB e su AD,
e posto $\overline{PK} = x$ e $\overline{PH} = y$, si trova $x = \frac{(6 - \sqrt{11})}{10}r$, $y = \frac{(3 + 2\sqrt{11})}{10}r$]

115 ESERCIZIO GUIDATO

Determina la misura del raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo isoscele, in cui l'area vale $12a^2$ e la base misura $4a$.



- Fai riferimento alla figura qui a fianco.
- Conoscendo le misure dell'area e della base, puoi ricavare la misura dell'altezza relativa alla base:

$$\overline{CH} = \frac{2 \cdot 12a^2}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

- Indica con O il centro della circonferenza circoscritta al triangolo e con x la misura del raggio di tale circonferenza (*vedi* la figura). Tra quali valori può variare x?
- Puoi ricavare x dall'equazione che si ottiene applicando il teorema di Pitagora, per esempio, al triangolo rettangolo OHB. Poiché:

$$\overline{OH} = \overline{CH} - \overline{OC} = \ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \overline{HB} = \ldots\ldots, \quad \overline{OB} = x$$

la relazione $\overline{OH}^2 + \overline{HB}^2 = \overline{OB}^2$ si traduce nell'equazione:

$$(\ldots\ldots - x)^2 + \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

che, risolta, fornisce la soluzione $x = \ldots\ldots$

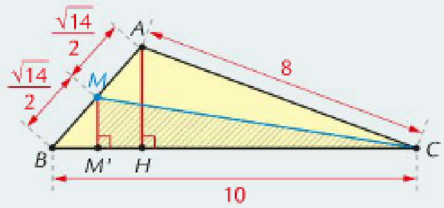
- Valuta se la soluzione trovata è accettabile e concludi. $\left[\frac{10a}{3}\right]$

116 Determina la lunghezza del raggio della circonferenza circoscritta a un triangolo isoscele in cui la base è lunga 8 cm e l'area è 32 cm^2. [5 cm]

117 Determina la lunghezza del raggio della circonferenza inscritta in un triangolo isoscele in cui i lati obliqui sono lunghi 10 cm e la base è lunga 12 cm. [3 cm]

118 ESERCIZIO GUIDATO

In un triangolo ottusangolo ABC, risulta $AB = \sqrt{14}$ cm, $AC = 8$ cm e $BC = 10$ cm. Indica con M il punto medio di AB e calcola la lunghezza della mediana CM.



- Individua i dati e l'obiettivo.
- Indica con M' la proiezione di M sul lato BC e osserva che:
  - se riesci a determinare $M'C$ e MM', poi puoi determinare la misura della mediana CM applicando il teorema di Pitagora al triangolo $MM'C$;
  - è facile determinare $M'C$ e MM', una volta che si conoscono AH, BH e HC (perché?).
- Per ricavare le misure di AH, BH e HC, poni anzitutto $\overline{BH} = x$ (dovrà essere $0 \leq x \leq 10$). Per il teorema di Pitagora applicato al triangolo AHC e al triangolo AHB, deve essere:

$$\overline{AH}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 \quad \text{e} \quad \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2 \Rightarrow \overline{AC}^2 - \overline{CH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BH}^2$$

Esprimendo questa uguaglianza in funzione di x ottieni l'equazione:

$$\ldots\ldots\ldots - (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2 = 14 - \ldots\ldots \quad \text{che, risolta, fornisce } x = \ldots\ldots\ldots$$

- Ora puoi ricavare le misure di tutti i segmenti che ti occorrono:

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BH}^2} = \ldots\ldots\ldots$$ Teorema di Pitagora

$$\overline{MM'} = \frac{1}{2}\overline{AH} = \ldots\ldots\ldots$$ Teorema dei punti medi (perché puoi dire che M' è il punto medio di BH?)

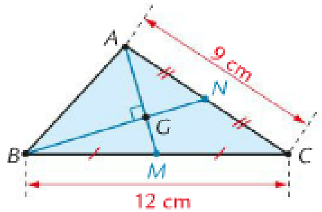
$$\overline{M'C} = \overline{M'H} + \overline{HC} = \frac{1}{2}\overline{BH} + \overline{HC} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{CM} = \sqrt{\overline{MM'}^2 + \overline{M'C}^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$ Teorema di Pitagora

Pertanto la lunghezza della mediana CM è ……… $\left[\frac{1}{2}\sqrt{314}\text{ cm} \simeq 8{,}86\text{ cm}\right]$

119 In un triangolo acutangolo ABC, risulta $AB = 5$ cm, $AC = \sqrt{17}$ cm, $BC = 4$ cm. Determina la lunghezza della mediana AM. [$\sqrt{17}$ cm]

120 In un triangolo ABC, la mediana AM è perpendicolare alla mediana BN. Sapendo che BC è lungo 12 cm e AC è lungo 9 cm, determina la lunghezza di AB. (*Suggerimento*: indica con G il baricentro del triangolo, poni $\overline{GM} = x$ e $\overline{GN} = y$; ricordando le proprietà del baricentro puoi ottenere le misure di AG e BG; poi imposta un sistema applicando il teorema di Pitagora ai triangoli AGN e BGM)



[$AB = 3\sqrt{5}$ cm]

Triangoli rettangoli con angoli acuti di 30° e 60° o di 45°

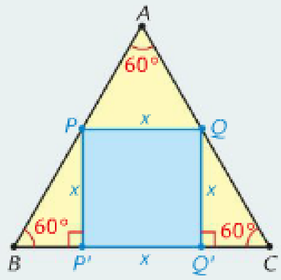
121 In un trapezio $ABCD$, di base maggiore AB e base minore CD, $\widehat{A} = 60°$, $\widehat{B} = 30°$ e $CD = 3$ cm. Determina il perimetro del trapezio, sapendo che la sua area è $5\sqrt{3}$ cm^2.
(*Suggerimento*: indica con x l'altezza del trapezio, esprimi l'area del trapezio in funzione di x e risolvi l'equazione che ottieni imponendo che tale area sia $5\sqrt{3}$ cm^2) [$(12 + 2\sqrt{3})$ cm]

122 In un trapezio isoscele $ABCD$, gli angoli adiacenti alla base maggiore AB sono di 45°. Sapendo che la base minore del trapezio è congruente ai lati obliqui e che il perimetro del trapezio è $(12 + 3\sqrt{2})$ cm, determina l'area. $\left[\dfrac{9(\sqrt{2}+1)}{2}\ \text{cm}^2\right]$

123 I due angoli acuti di un parallelogramma $ABCD$ hanno ampiezza 60°. Inoltre il lato BC supera di 4 cm il lato AB. Sapendo che l'area del parallelogramma è $30\sqrt{3}$ cm^2, determina il perimetro del parallelogramma. [32 cm]

124 ESERCIZIO GUIDATO

Considera un triangolo equilatero ABC, il cui lato misura l. Determina la misura del lato del quadrato inscritto nel triangolo ABC, con un lato su BC.



- Individua i dati e l'obiettivo.
- Poni uguale a x la misura del lato del quadrato $PP'Q'Q$, inscritto nel triangolo ABC e avente un lato su BC; dovrà essere $0 < x <$ ......
- Considera ora i triangoli $PP'B$ e $QQ'C$. Tali triangoli hanno gli angoli di 30°, 60° e 90°; quindi:

$$\overline{BP'} = \frac{x}{\sqrt{\cdots}} \quad \text{e} \quad \overline{CQ'} = \frac{x}{\sqrt{\cdots}}$$

- Poiché $\overline{BC} = \overline{BP'} + \overline{P'Q'} + \overline{Q'C}$, puoi scrivere l'equazione:

$$\underbrace{l}_{\overline{BC}} = \underbrace{\cdots\cdots}_{\overline{BP'}} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\overline{P'Q'}} + \underbrace{\cdots\cdots}_{\overline{Q'C}}$$ che, risolta, fornisce $x =$ ....

- Rispondi al problema. [$\overline{PQ} = (2\sqrt{3} - 3)l$]

125 Considera un triangolo equilatero ABC, di lato l. Un rettangolo $PQRS$, inscritto nel triangolo, con il lato PQ su AB, ha il perimetro uguale alla metà del perimetro del triangolo. Determina le misure dei lati di $PQRS$. [impossibile!]

126 Considera un triangolo equilatero ABC, di lato l. Un rettangolo $PQRS$, inscritto nel triangolo, con il lato PQ su AB, ha il perimetro di misura $\dfrac{(9 - 2\sqrt{3})l}{3}$. Determina le misure dei lati di $PQRS$. $\left[\overline{PS} = \overline{QR} = \dfrac{l}{2};\ \overline{PQ} = \overline{RS} = \dfrac{(3-\sqrt{3})l}{3}\right]$

127 Considera un triangolo equilatero ABC, di lato l. Un rettangolo $PQRS$, inscritto nel triangolo, con il lato PQ su AB, ha le diagonali di misura $\dfrac{2}{3}l$. Determina le misure dei lati di $PQRS$. $\left[\overline{PS} = \overline{QR} = \dfrac{5l\sqrt{3}}{21} \vee \overline{PS} = \overline{QR} = \dfrac{l\sqrt{3}}{3}\right]$

128 In un triangolo equilatero ABC, le mediane misurano $l\sqrt{3}$. Stabilisci quanto misura il lato del triangolo e determina un punto P, sul lato AB, in modo che risulti $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = \frac{29}{8} l^2$.
$\left[\text{posto } \overline{PA} = x, \text{ si trova } x = \frac{l}{4} \lor x = \frac{3}{4} l\right]$

129 In un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, l'angolo $\widehat{C}$ ha ampiezza uguale a 120°. Le mediane AM e BN sono lunghe $3\sqrt{7}$ cm. Determina il perimetro del triangolo. $[6(2+\sqrt{3})\text{ cm}]$

130 Figure dinamiche Sia ABC un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa BC, in cui il lato AB misura $2a$. Indica con M il punto medio di AB e con M' la sua proiezione su BC. Determina un punto P sul lato AC in modo che, detta P' la sua proiezione ortogonale su BC, l'area del trapezio $PMM'P'$ sia $\frac{8}{9}a^2$.
$\left[\overline{PC} = \frac{a}{3} \lor \overline{PC} = \frac{5}{3} a\right]$

131 Sia $ABCD$ un rettangolo in cui $BC = AD = 1$ cm. Costruisci, esternamente al rettangolo, il triangolo CED, isoscele sulla base CD, avente l'angolo $C\widehat{E}D$ di ampiezza 120°. Sapendo che l'area del pentagono $ABCED$ è $8\sqrt{3}$ cm², determina il perimetro del pentagono. $[(10+4\sqrt{3})\text{ cm}]$

132 Sia ABC un triangolo isoscele sulla base AB, in cui $A\widehat{C}B = 120°$.

a. Sapendo che l'area del triangolo è $a^2\sqrt{3}$, determina le misure dei suoi lati.

b. Indicato con M il punto medio del lato AC, determina un punto P, sul lato AB, in modo che risulti:

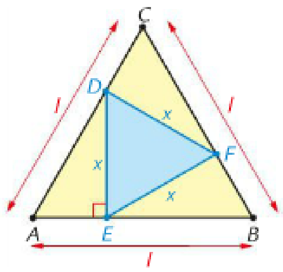
$$\overline{PA}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{PB}^2 = 7a^2$$

$\left[\textbf{a. } \overline{AC} = \overline{BC} = 2a, \overline{AB} = 2a\sqrt{3}; \textbf{ b. } \overline{PA} = \frac{2}{3}a\sqrt{3} \lor \overline{PA} = a\sqrt{3}\right]$

133 Sia ABC un triangolo equilatero il cui lato misura l e sia DEF un altro triangolo equilatero in esso inscritto, con il lato ED perpendicolare ad AB. Determina:

a. la misura del lato del triangolo DEF;

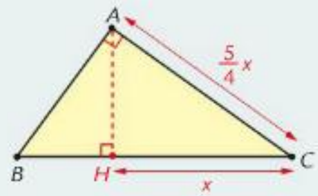
b. il rapporto fra le aree di ABC e DEF.



$\left[\frac{l\sqrt{3}}{3};\ 3\right]$

134 ESERCIZIO GUIDATO

In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{5}{4}$ della sua proiezione sull'ipotenusa. Sapendo che il perimetro del triangolo è 24 cm, determina l'area del triangolo.



- Individua i dati e l'obiettivo.
- Indica con x la misura della proiezione del cateto sull'ipotenusa

  $\overline{HC} = x$, cosicché $\overline{AC} = \frac{5}{4}x$

  Qual è il dominio di x?

- Esprimi le misure dei tre lati in funzione di x, in modo da poter poi impostare un'equazione imponendo che la misura del perimetro sia 24.

$$\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{HC}} = \frac{\left(\frac{5}{4}x\right)^2}{x} = \frac{25}{16}x \qquad \text{Primo teorema di Euclide}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BH} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\overline{BC} \cdot \overline{BH}} = \sqrt{\frac{25}{16}x \cdot \frac{9}{16}x} = \sqrt{\frac{25 \cdot 9}{16^2}x^2} = \ldots\ldots \qquad \text{Primo teorema di Euclide}$$

$$\boxed{\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} = \frac{25}{16}x - x = \frac{9}{16}x}$$

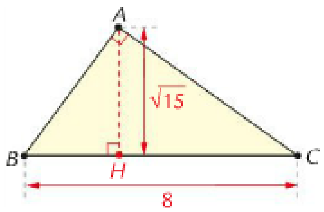
Puoi allora impostare l'equazione:

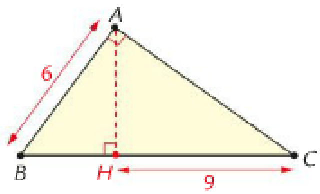
$$\underbrace{\ldots\ldots}_{\overline{AB}} + \underbrace{\frac{5}{4}x}_{\overline{AC}} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\overline{BC}} = 24$$

che, risolta, fornisce ......

- Le lunghezze di AB e AC sono allora ...., quindi l'area del triangolo è .... . [24 cm^2]

135 Nei triangoli rettangoli rappresentati nelle figure qui sotto sono indicate le misure, in cm, di alcuni segmenti. Determina le misure di tutti i lati dei triangoli.





[$\overline{AB} = 2\sqrt{6}$, $\overline{AC} = 2\sqrt{10}$; $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 6\sqrt{3}$]

136 In un triangolo rettangolo, una delle due proiezioni dei cateti sull'ipotenusa supera l'altra di 6 cm. Sapendo che l'altezza relativa all'ipotenusa è lunga 4 cm, determina le lunghezze dei lati del triangolo. [$4\sqrt{5}$ cm; $2\sqrt{5}$ cm; 10 cm]

137 In un triangolo rettangolo la proiezione di un cateto sull'ipotenusa è 2 cm in meno del cateto stesso. Sapendo che l'ipotenusa è lunga 8 cm, determina il perimetro e l'area del triangolo. [$(12 + 4\sqrt{3})$ cm; $8\sqrt{3}$ cm^2]

138 In un triangolo rettangolo ABC la proiezione del cateto BC sull'ipotenusa AC è $\frac{4}{5}$ dell'ipotenusa. L'area del triangolo è 125 cm^2. Determina il perimetro. [$(25 + 15\sqrt{5})$ cm]

139 In un rettangolo $ABCD$, siano H e K, rispettivamente, le proiezioni di B e D sulla diagonale AC. Sapendo che $\overline{HK} = a$ e $\overline{AB} = 2\overline{BC}$, determina l'area del rettangolo. $\left[\frac{10}{9}a^2\right]$

140 In un triangolo rettangolo un cateto supera di 2 cm la sua proiezione sull'ipotenusa. Determina le lunghezze dei cateti del triangolo, sapendo che l'ipotenusa è lunga 9 cm. [Ci sono due triangoli che soddisfano le condizioni richieste: uno ha i cateti lunghi 6 cm e $3\sqrt{5}$ cm; l'altro ha i cateti lunghi 3 cm e $6\sqrt{2}$ cm]

141 In un triangolo rettangolo ABC, sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa BC. Sapendo che AH è il doppio di BH e che l'area del triangolo è 45 cm^2, determina il suo perimetro. $[(15+9\sqrt{5})\text{cm}]$

142 In un trapezio rettangolo $ABCD$, di base maggiore AB e base minore CD, la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC. Sapendo che l'altezza del trapezio misura 6 cm e l'area è 81cm^2, determina il perimetro del trapezio.
[Ci sono due trapezi che soddisfano le condizioni date, uno in cui $AB = 15$ cm e $CD = 12$ cm, di perimetro $(33+3\sqrt{5})$ cm, e uno in cui $AB = 25{,}5$ cm e $CD = 1{,}5$ cm, di perimetro $(33+6\sqrt{17})$ cm]

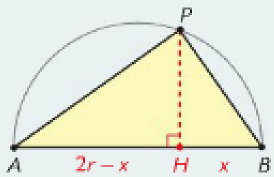
143 In un triangolo rettangolo ABC, sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa BC. Sapendo che BC misura $\frac{13}{4}a$ e che la misura di CH supera di $\frac{3}{4}a$ quella di AH, determina l'area del triangolo. $\left[\frac{39}{16}a^2\right]$

144 Il lato di un rombo è lungo 20 cm e il raggio della circonferenza inscritta nel rombo è lungo 8 cm. Quanto sono lunghe le diagonali del rombo? [$8\sqrt{5}$ cm e $16\sqrt{5}$ cm]

145 **Figure dinamiche** È data una circonferenza di diametro AB, centro O e raggio r. Determina un punto P sul diametro AB, in modo che, detta CD la corda perpendicolare ad AB passante per P, risulti $\overline{CD}^2 + 2\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$. $\left[\overline{AP} = \frac{(3-\sqrt{5})r}{2}\right]$

146 **ESERCIZIO GUIDATO**

Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Determina su di essa un punto P in modo che, indicata con H la proiezione di P su AB, risulti $\overline{AP}^2 + \overline{PH}^2 = 8\,\overline{HB}^2$.



- Individua i dati e l'obiettivo.
- Il punto P resterà univocamente determinato una volta che si conosce, per esempio, la distanza di H da B. Poni perciò $\overline{HB} = x$. Qual è il dominio di x?
- Per tradurre la relazione $\overline{AP}^2 + \overline{PH}^2 = 8\,\overline{HB}^2$ in un'equazione, esprimi in funzione di x le misure di AP, PH e HB.

  $\overline{AP}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AH} = 2r(2r-x)$ Primo teorema di Euclide applicato al triangolo APB

  $\overline{PH}^2 = \overline{AH}\cdot\overline{HB} = (2r-x)x$ Secondo teorema di Euclide applicato al triangolo APB

  $\overline{HB}^2 = x^2$ Abbiamo posto $\overline{HB} = x$

  Puoi quindi scrivere l'equazione:

  $\underbrace{2r(2r-x)}_{\overline{AP}^2} + \underbrace{2r-x)x}_{\overline{PH}^2} = 8\underbrace{x^2}_{\overline{HB}^2}$ che, risolta, fornisce $x = \pm$ ....

- Tra le due soluzioni dell'equazione, l'unica accettabile ai fini del nostro problema è quella positiva, in quanto deve essere $x > 0$. Puoi quindi concludere che esiste un unico punto P per cui è soddisfatta la relazione indicata dal testo: quello per cui la distanza di H da B è uguale a ...... $\left[\frac{2}{3}r\right]$

147 Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ e la misura della sua altezza è la metà del raggio. Determina l'area del trapezio. $\left[\dfrac{(2+\sqrt{3})}{4}r^2\right]$

148 Un trapezio isoscele è inscritto in una semicirconferenza il cui raggio misura r. L'area della somma dei quadrati costruiti sui suoi lati misura $7r^2$. Determina il perimetro e l'area del trapezio. $\left[\text{Perimetro} = 5r;\ \text{Area} = \dfrac{3}{4}\sqrt{3}r^2\right]$

149 In una circonferenza di raggio r, è data una corda AB tale che, condotte le tangenti alla circonferenza nei due punti A e B, e indicato con P il punto d'incontro di tali tangenti, la distanza di P da AB è $4r$. Qual è la distanza della corda dal centro della circonferenza? $[(\sqrt{5}-2)r]$

150 Un triangolo isoscele è inscritto in un cerchio di raggio r. Determina l'altezza del triangolo relativa alla base, in modo che l'area della somma dei quadrati costruiti sui lati del triangolo misuri $5r^2$.

$\left[\text{Posta uguale a } x \text{ la misura dell'altezza relativa alla base, si trova } x = \dfrac{r}{2}\right]$

151 Un triangolo ABC, isoscele sulla base AB, è inscritto in una circonferenza di raggio 7,5 cm. Sapendo che la somma delle lunghezze della base del triangolo e dell'altezza a esso relativa è 24 cm, determina l'area del triangolo.

[Esistono due triangoli che soddisfano le condizioni date: uno di area = 72 cm^2 e l'altro di area 69,12 cm^2]

152 Considera un rettangolo $ABCD$ e indica con H e K, rispettivamente, le proiezioni di D e di B sulla diagonale AC. Sapendo che CH è il quadruplo di AH e che l'area del parallelogramma $HBKD$ è 54 cm^2, determina il perimetro, l'area e la lunghezza delle diagonali del rettangolo $ABCD$. [Perimetro = $18\sqrt{5}$ cm; Area = 90 cm^2; diagonali = 15 cm]

153 In un trapezio rettangolo $ABCD$ la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC. La misura della base maggiore supera di 2 cm quella della base minore e la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali del trapezio è 68 cm^2. Determina perimetro e area del trapezio. [Perimetro = $(10+2\sqrt{2}+2\sqrt{3})$cm; Area = $10\sqrt{2}$ cm^2]

154 Considera una circonferenza γ di centro O, diametro AB e raggio r, e la circonferenza γ', tangente internamente a γ in B, avente centro in A. Traccia una retta t perpendicolare ad AB, che intersechi la circonferenza γ nei punti P e Q e la circonferenza γ' nei punti P' e Q'. Determina a quale distanza da B deve essere tracciata la retta t, in modo che sia verificata la relazione:

$$\overline{PQ}^2 + \overline{P'Q'}^2 = 10r^2$$

$\left[\dfrac{r}{2}\right]$

155 È data una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r. Considera rispettivamente sui due raggi OA e OB, due punti P e Q tali che $\overline{OQ} = 2\overline{OP}$; siano P' e Q', rispettivamente i punti in cui le perpendicolari ad AB passanti per P e Q incontrano la semicirconferenza stessa. Determina la posizione di P in modo che risulti $\overline{P'Q}^2 + \overline{PQ'}^2 = \dfrac{31}{9}r^2$. $\left[\overline{OP} = \dfrac{r}{3}\right]$

156 Videolezione In un trapezio isoscele, circoscritto a una circonferenza, l'area misura $20a^2$ e il perimetro misura $20a$. Determina le misure dei lati del trapezio. [$8a$; $5a$; $2a$; $5a$]

157 Data una semicirconferenza di diametro AB e raggio r, sia $PQRS$ un rettangolo inscritto nella semicirconferenza, con il lato PQ su AB. Determina le misure dei lati del rettangolo, in modo che la somma del lato PQ e della diagonale PR misuri $3r$. $[\overline{PQ} = 2r(6-2\sqrt{7});\ \overline{QR} = r\sqrt{24\sqrt{7}-63}]$

158 Un triangolo isoscele è inscritto in un cerchio di raggio r. Determina l'altezza del triangolo relativa alla base, in modo che l'area della somma dei quadrati costruiti sui lati del triangolo misuri $\dfrac{35}{4}r^2$.

$\left[\text{Posta uguale a } x \text{ la misura dell'altezza relativa alla base, il problema ha due soluzioni: } x = \dfrac{5}{4}r \vee x = \dfrac{7}{4}r\right]$

159 Considera un triangolo equilatero ABC, il cui lato misura l. Traccia, esternamente al triangolo equilatero, la semicirconferenza di diametro AB. Determina, su tale semicirconferenza, il punto P tale che $\overline{PC}^2 = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}+1\right)l^2$.

[Detta H la proiezione di P su AB e posto $\overline{HB} = x$, si perviene all'equazione $9x^2 - 9lx + 2l^2 = 0$, con $0 < x < l$; si trovano due soluzioni: $x = \dfrac{l}{3} \vee x = \dfrac{2l}{3}$]

160 In un trapezio rettangolo $ABCD$ la diagonale AC è perpendicolare al lato obliquo BC. L'altezza AD misura $6a$ e la base minore CD misura $9a$. Determina il perimetro del trapezio. $[(28 + 2\sqrt{13})a]$

161 Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC e sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa. Sapendo che la misura dell'ipotenusa supera di $4a$ quella del cateto AB e che $\overline{AB} - \frac{5}{8}\overline{HC} = 2a$, determina il perimetro del triangolo. $[24a]$

162 In un trapezio rettangolo $ABCD$ (non degenere) di perimetro 20 cm, il lato obliquo BC è lungo 5 cm e la base minore CD è congruente all'altezza AD. Determina le lunghezze delle basi e dell'altezza del trapezio. [7 cm, 4 cm, 4 cm]

163 In un trapezio rettangolo $ABCD$ la base minore CD è congruente all'altezza AD e la base maggiore AB supera di 2 cm la base minore CD. La somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali del trapezio è 84 cm^2. Determina l'area del trapezio. [20 cm^2]

164 Il raggio di una semicirconferenza di centro O e diametro AB è r. Determina la misura di una corda CD, parallela ad AB (con C più vicino ad A che a B) in modo che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del trapezio $ABDC$ sia $\frac{15}{2}r^2$. $\left[\overline{CD} = \frac{(2-\sqrt{2})r}{2} \vee \overline{CD} = \frac{(2+\sqrt{2})r}{2}\right]$

165 Sia ABC un triangolo equilatero di lato l. Determina un punto P sul lato BC in modo che sia verificata la relazione $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \frac{8}{9}l^2$. $\left[\overline{PB} = \frac{1}{3}l \vee \overline{PB} = \frac{1}{6}l\right]$

166 Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in un semicerchio di diametro AB. I lati obliqui del trapezio misurano $\frac{3}{2}a$ e la base maggiore AB è $\frac{25}{7}$ della base minore CD. Determina perimetro e area del trapezio. $\left[\text{Perimetro} = \frac{31}{5}a;\ \text{Area} = \frac{48}{25}a^2\right]$

167 Sia ABC un triangolo equilatero il cui lato misura a. Considera un punto P sul lato AC e traccia da P la parallela ad AB che interseca BC in Q e la parallela a BC che interseca AB in R. Determina la posizione di P in modo che $\overline{QR}^2 = \frac{1}{3}a^2$. $\left[\overline{AP} = \frac{1}{3}a \vee \overline{AP} = \frac{2}{3}a\right]$

168 Due corde AB e AD di una circonferenza sono tali che AD è perpendicolare ad AB. La lunghezza di AB è uguale al lato di un quadrato inscritto nella circonferenza mentre la lunghezza di AD supera di 1 cm il raggio della circonferenza. Determina la lunghezza del raggio della circonferenza. $[(1 + \sqrt{2})$ cm$]$

169 Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di raggio r e la base maggiore AB coincide con un diametro della circonferenza. Determina la misura della base minore CD in modo che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del trapezio sia $\frac{5}{2}$ dell'area del quadrato costruito su uno dei lati di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza. $\left[\text{Due soluzioni: } \overline{CD} = \frac{r}{2}(2+\sqrt{2}) \text{ oppure } \overline{CD} = \frac{r}{2}(2-\sqrt{2})\right]$

170 Figure dinamiche Sia ABC un triangolo equilatero di lato a; determina un punto P sul lato AB in modo che, dette H e K le proiezioni di P rispettivamente su BC e su AC, l'area del quadrilatero $PHCK$ sia $\frac{11}{16}$ dell'area del triangolo ABC.

$\left[\overline{AP} = \frac{a}{4} \vee \overline{AP} = \frac{3}{4}a\right]$

171 In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa.

a. Sapendo che $\overline{AB} = a\sqrt{5}$ e $\overline{BH} = a$, determina il perimetro e l'area del triangolo.

b. Determina il punto P, sul prolungamento di AH dalla parte di H, tale che sia verificata la relazione:

$\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = 50a^2$

[**a.** Perimetro $= (3\sqrt{5} + 5)a$; Area $= 5a^2$; **b.** $\overline{PH} = 3a$]

172 In una circonferenza di raggio r e centro O, considera una corda AB avente lunghezza uguale al lato di un quadrato inscritto nella circonferenza. Tracciata la retta t, perpendicolare ad AB in B, indica con C l'ulteriore punto che tale retta ha in comune con la circonferenza (oltre a B).

a. Determina un punto P sulla retta t, appartenente al semipiano avente come origine la retta AB cui non appartiene O, in modo che sia verificata la relazione $\overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 = 28r^2$.

b. In corrispondenza del punto P individuato al punto precedente, determina l'area e il perimetro del triangolo APC.

[**a.** $\overline{PB} = 2r\sqrt{2}$; **b.** Area $= 3r^2$, Perimetro $= (2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{10})r$]

173 Un triangolo equilatero ABC ha area uguale a $9a^2\sqrt{3}$.

a. Determina la misura del lato del triangolo.

b. Sia M il punto medio di AB. Determina un punto P, appartenente al lato AC, in modo che risulti $\overline{PM}^2 + \overline{PB}^2 = 36a^2$.

c. Dimostra che in corrispondenza di uno dei due punti P che soddisfano la condizione di cui al punto precedente, il quadrilatero $PMBC$ è un trapezio isoscele.

$\left[\textbf{a. } 6a; \textbf{ b. } \text{due possibili soluzioni: } \overline{PA} = 3a \vee \overline{PA} = \frac{3}{2}a\right]$

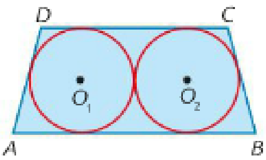
174 Sia $r\hat{O}s$ un angolo di ampiezza 120°. Considera, rispettivamente sui lati r ed s, i due punti A e B, tali che $\overline{OA} = 2a$ e $\overline{OB} = a$.

a. Determina il punto P, sulla bisettrice dell'angolo $r\hat{O}s$, in modo che risulti $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 7a^2$.

b. In corrispondenza del punto P individuato al punto precedente, determina le ampiezze degli angoli del quadrilatero $OAPB$ e stabilisci se è inscrivibile in una circonferenza.

[**a.** $\overline{OP} = 2a$; **b.** 60°, 120°, 90°, 90°, non inscrivibile]

175 Due circonferenze congruenti γ_1 e γ_2, di centri O_1 e O_2, sono tangenti esternamente tra loro; inoltre la circonferenza γ_1 è tangente alle basi AB, CD e al lato obliquo AD del trapezio isoscele $ABCD$, mentre la circonferenza γ_2 è tangente alle basi AB, CD e al lato obliquo BC dello stesso trapezio (*vedi* la figura a fianco). Sapendo che $\overline{AB} = 6$ e $\overline{CD} = 4$, qual è la misura del raggio delle due circonferenze?
(*Suggerimento*: dimostra che il triangolo BO_2C è rettangolo)



$\left[\frac{6}{5}\right]$

185 Senza mai utilizzare il teorema di Pitagora, determina l'area e il perimetro di un triangolo rettangolo in cui le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa sono lunghe 16 cm e 25 cm. [Area $= 410$ cm^2, $2p = (9\sqrt{41} + 41)$ cm]

186 In un triangolo rettangolo ABC, di ipotenusa BC, il quadrato costruito sul cateto AB è equivalente a un rettangolo in cui la diagonale è lunga $6\sqrt{17}$ cm e la base è lunga 24 cm. Sapendo che la proiezione del cateto AB sull'ipotenusa è lunga 8 cm, determina le lunghezze di tutti i lati del triangolo. [12 cm; 18 cm; $6\sqrt{5}$ cm]

187 Dato un quadrato $ABCD$, il cui lato misura $4a$, considera il punto P, sulla diagonale AC, tale che $\overline{AP} = 3\sqrt{2}\,a$. Determina le distanze di P da B, C e D. [$\overline{PD} = \overline{PB} = a\sqrt{10}$; $\overline{PC} = a\sqrt{2}$]

188 In un trapezio rettangolo $ABCD$ il lato obliquo BC è lungo 10 cm; l'altezza è il doppio della base minore e la base maggiore è $\frac{5}{2}$ della base minore. Determina perimetro e area del trapezio. [perimetro $= 32$ cm; area $= 56$ cm^2]

189 Dato un triangolo equilatero ABC, di lato l, considera sui tre lati AB, BC e AC, rispettivamente i punti P, Q e R, tali che $AP \cong BQ \cong CR$. Determina la misura di questi tre segmenti in modo che il triangolo equilatero PQR abbia area uguale a $\frac{3}{4}$ dell'area di ABC. $\left[\overline{AP} = \dfrac{l(3-\sqrt{6})}{6} \vee \overline{AP} = \dfrac{l(3+\sqrt{6})}{6}\right]$

190 Un trapezio rettangolo $ABCD$ ha l'altezza lunga 6 cm. L'angolo formato dal lato obliquo e dall'altezza è di 45°. Sapendo che la somma delle aree dei quadrati costruiti sui lati del trapezio è 254 cm^2, determina perimetro e area del trapezio.
[Perimetro $= (22 + 6\sqrt{2})$ cm; Area $= 48$ cm^2]

191 L'area di un triangolo rettangolo ABC, in cui l'ipotenusa BC è lunga 26 cm, è 65 cm^2. Determina il perimetro del triangolo. [$(26 + 6\sqrt{26})$ cm]

192 Un trapezio isoscele $ABCD$ è inscritto in una semicirconferenza di diametro AB, il cui raggio misura r. Determina la misura dei lati obliqui del trapezio, in modo che il suo perimetro misuri $4{,}5r$. $\left[\overline{BC} = \overline{AD} = \dfrac{(2-\sqrt{2})}{2}r\right]$

193 Considera un triangolo rettangolo isoscele ABC, in cui i cateti AB e AC misurano $2a$, e indica con M e N i punti medi di BC e AB. Determina un punto P, sul prolungamento di AC dalla parte di C, in modo che sia verificata la relazione $\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2 = \overline{PB}^2$. [$\overline{PA} = (1 + \sqrt{2})a$]

194 Un quadrilatero $ACBD$ è inscritto in una circonferenza di diametro AB e raggio $5a$. Sapendo che $\overline{BC} = a\sqrt{10}$ e $\overline{BD} = 4a\sqrt{5}$, determina il perimetro e l'area del quadrilatero e la misura della diagonale CD.
(*Suggerimento*: per determinare la misura di CD, può essere utile tracciare da C la parallela ad AB e da D la perpendicolare ad AB) [Perimetro $= 6a\sqrt{5} + 4a\sqrt{10}$; Area $= 35a^2$; $\overline{CD} = 7a\sqrt{2}$]