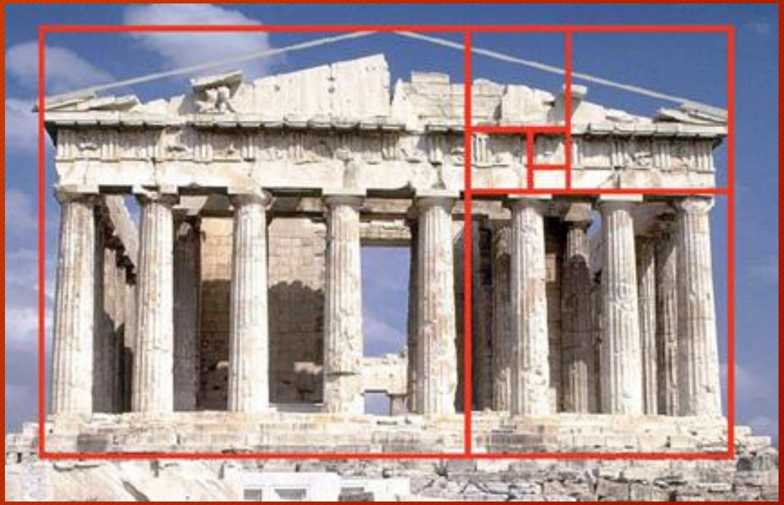
LA SEZIONE AUREA

La geometria ha due grandi tesori:
uno è il Teorema di Pitagora; l'altro la divisione di un segmento in rapporti estremo medio. Il primo possiamo paragonarlo a un metro d'oro; il secondo possiamo chiamarlo gioiello"
Keplero



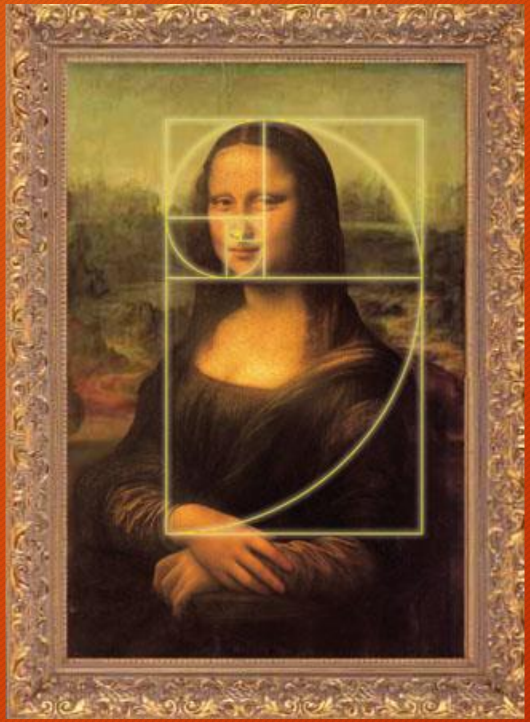
METODOLOGIA

- Un ragazzo è stimolato ad apprendere se coinvolto emotivamente.

"Uno scienziato nel suo laboratorio non è soltanto un tecnico, è anche un fanciullo posto di fronte a fenomeni naturali che lo impressionano come un racconto di fate"
(Marie Curie)

Fase 1: Osservazione e misura di una serie di rettangoli in oggetti

Foto dell’arte



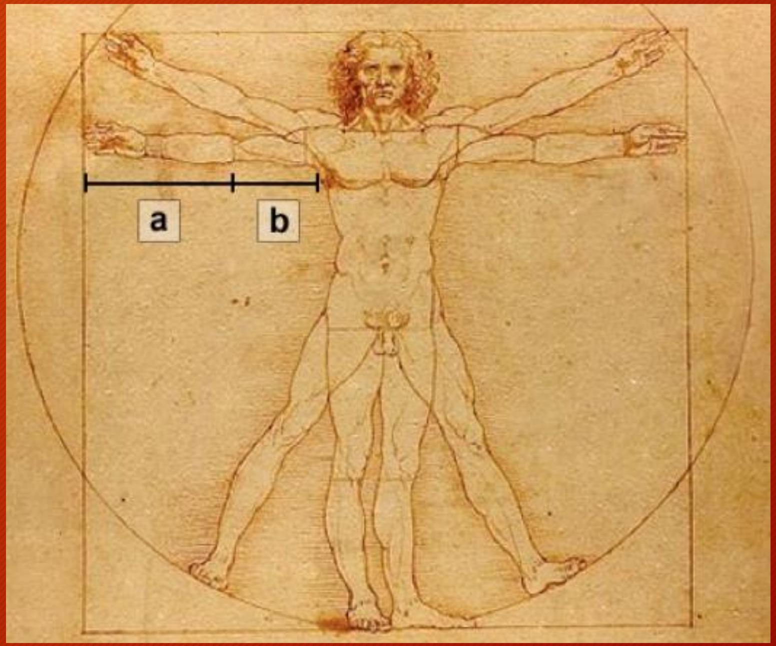
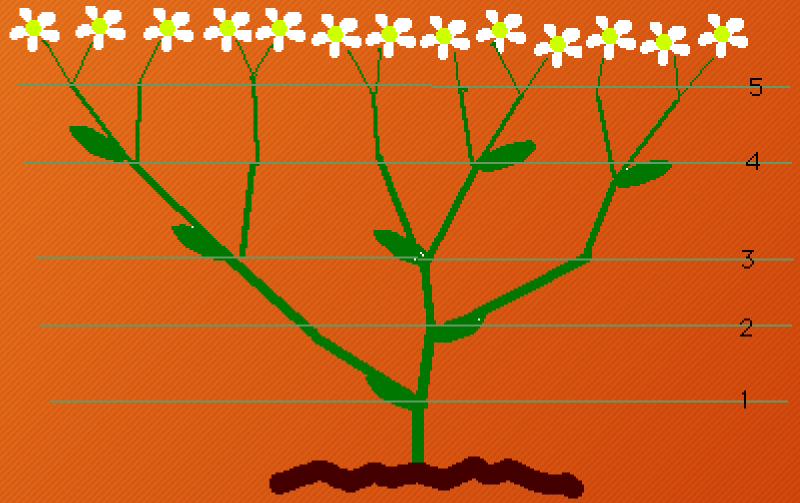


Foto della natura



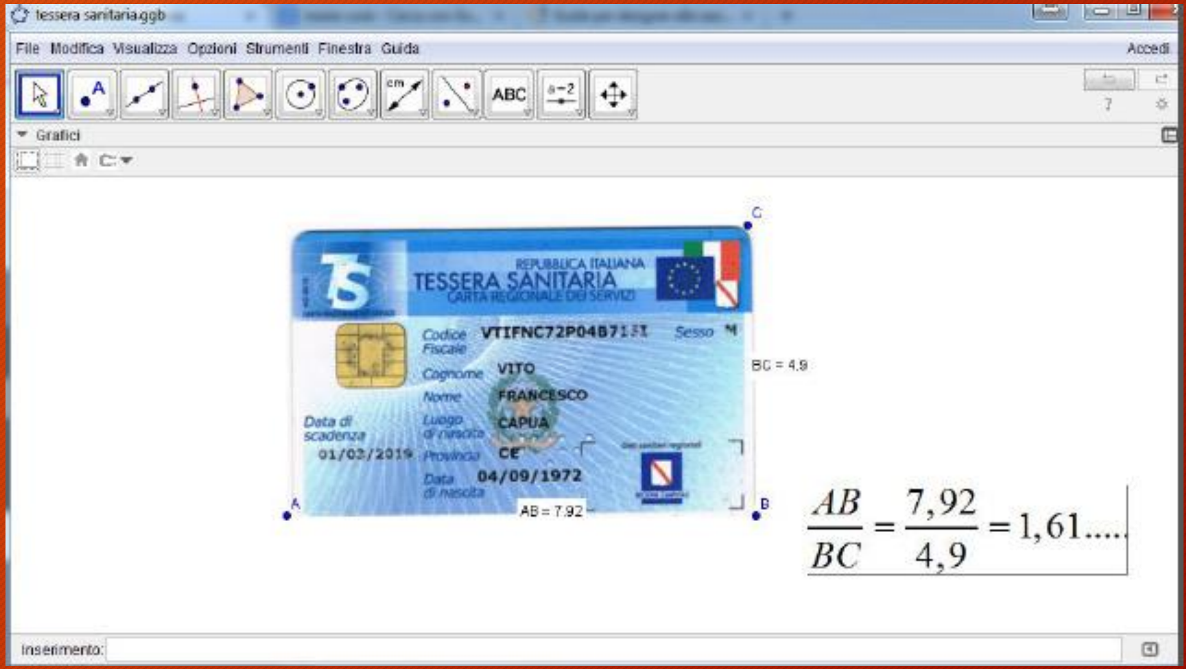
Attività

- Calcolo del rapporto delle dimensioni dei Rettangoli e scoperta del numero d’oro

- Contestualizzazione storica (Euclide, Fidia, Pacioli, Leonardo.)

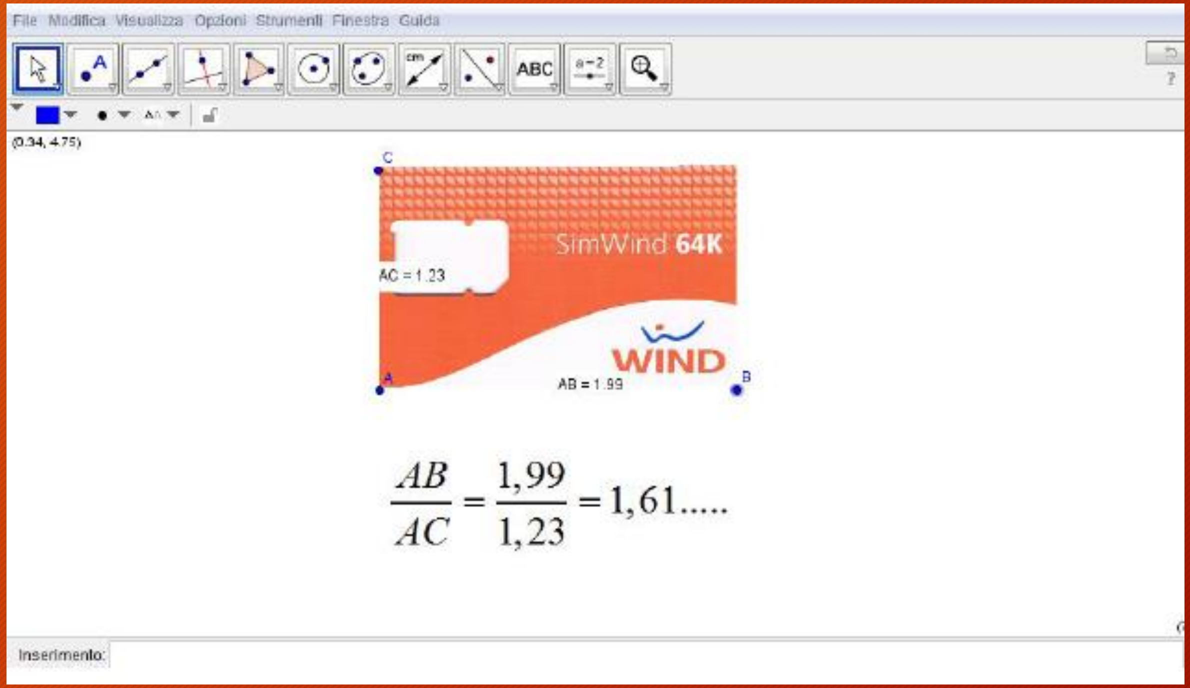
SCOPERTA DEL RAPPORTO AUREO

Usando il software GEOGEBRA si misura le lunghezze della tessera sanitaria del docente facendo scoprire che il rapporto tra i due lati è 1,61.....



.... e ancora

Anche il rapporto delle lunghezze dei due lati della scheda telefonica hanno come risultato il numero 1,61



Un tuffo nel passato

- Il merito della definizione matematica del numero d'oro spetta a Euclide. Ci sono stati naturalmene illustri matematici che se ne sono occupati prima di lui come Talete o Pitagora, ma è stato Euclide a darne una prima rigorosa definizione matematica, scritta nei suoi Elementi. Non lo presenta però come un numero particolare, dalle qualità eccezionali. E' semplicemente il numero che nasce dal suo studio dei pentagoni e dei decagoni, senza alcuna predilezione rispetto a triangoli, quadrati o altre figure. Non ci sono in Euclide preoccupazioni mistiche o esoteriche, ragiona già da perfetto scienziato. Ma altri matematici greci attribuirono un valore ben diverso, magico e religioso, al numero d'oro e al pentagono stellato al quale è collegato. E il trionfo del numero d'oro avverrà nel Cinquecento, con un interesse, fra matematici e artisti, che perdura ancora oggi. E' Luca Pacioli, il frate matematico amico di Leonardo da Vinci e suo consulente per la matematica, a dedicare uno dei più noti trattati alla "secretissima scientia" del numero d'oro, come si era sviluppata nei secoli, dal tempo dei pitagorici fino al Rinascimento. In questa sua opera, pubblicata nel 1509, dal titolo significativo, *De Divina Proportione*, Pacioli indaga su ogni possibile applicazione del numero d'oro in tutti i campi: *Philosophia*, *Perspectiva*, *Pictura*, *Sculptura*, *Architectura*, *Musica et altre Matematiche*. I disegni del suo libro sono opera di Leonardo Da Vinci.

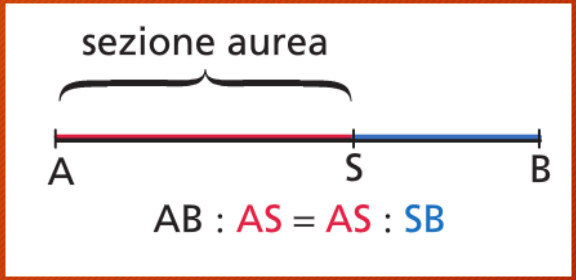
NUMERO AUREO

Il nome di questo importante numero è un termine moderno. Presso i greci, come abbiamo detto, non aveva un nome particolare, mentre Luca Pacioli impiegò il termine *divina proportione* e Keplero *sectio divina*. Fu Leonardo infine a utilizzare il termine *sectia aurea*, *sezione aurea*.

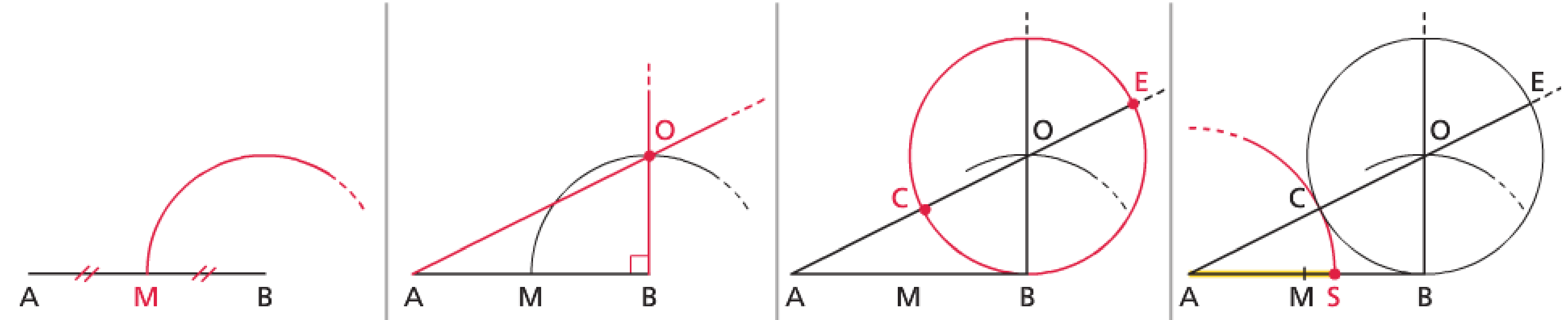
Jacopo de' Barbari, Ritratto di Fra' Luca Pacioli, 1495.
In quest'opera compare in vari modi il numero d'oro. Alle sue spalle, ad esempio, si trova un dodecaedro pentagonale, inoltre pollice e indice della mano sinistra formano un rettangolo aureo, cioè il rapporto delle due dimensioni è il numero d'oro.

Fase 2 DEFINIZIONE RIGOROSA DI SEZIONE AUREA

La sezione aurea di un segmento è la parte di un segmento media proporzionale fra tutto il segmento e la parte rimanente.



Costruzione geometrica della sezione aurea



a. Disegniamo un segmento *AB*, il suo punto medio *M* e un arco di centro *B* e raggio *BM*.

b. La perpendicolare per *B* al segmento *AB* interseca l'arco nel punto *O*. Tracciamo la semiretta *AO*.

c. Tracciamo la circonferenza di centro *O* e raggio *OB*. Essa interseca la semiretta *AO* nei punti *C* ed *E*.

d. Con centro in *A* e raggio *AC*, tracciamo un arco che interseca *AB* nel punto *S*. Il segmento *AS* è la sezione aurea di *AB*.

Conoscenze e abilità richieste
per la costruzione geometrica
- determinare il punto medio di un segmento
- tracciare circonferenze di un dato centro e raggio
- trasportare un segmento

per la dimostrazione
- teorema della tangente e della secante
- operare con le proporzioni

Dimostrazione geometrica della sezione aurea

Per dimostrare che il segmento AS è la sezione aurea di AB, dobbiamo dimostrare che vale la proporzione $AB : AS = AS : SB$.
Per costruzione AB è tangente alla circonferenza di centro O e AE è secante. Applicando il teorema della secante e della tangente, otteniamo:

$$AE : AB = AB : AC.$$

Applichiamo la proprietà dello scomporre:

$$(AE - AB) : AB = (AB - AC) : AC.$$

Poiché $AB \cong CE$, risulta $AE - AB \cong AC$.

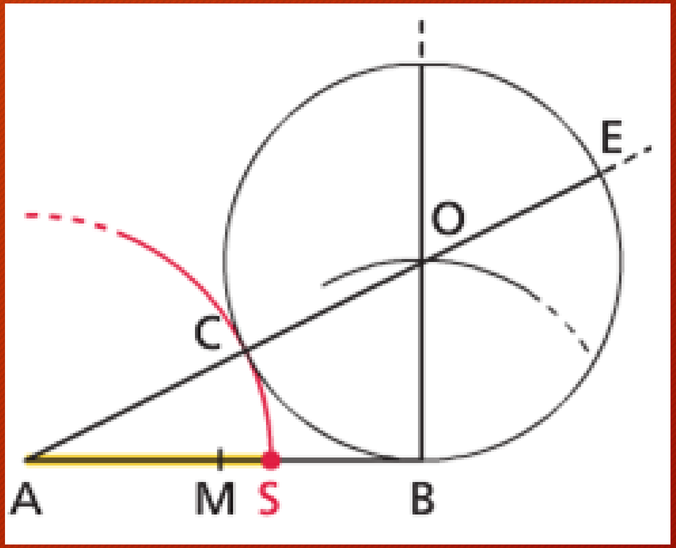
Inoltre, $AC \cong AS$, $AE - AB \cong AS$ e $AB - AC \cong AB - AS \cong SB$.

Riscriviamo la proporzione sostituendo con queste espressioni:

$$AS : AB = SB : AS.$$

Infine invertiamo i medi con gli estremi e otteniamo $AB : AS = AS : SB$.

Ciò dimostra che AS è la sezione aurea di AB.



LA SEZIONE AUREA E L'ALGEBRA

SE IL SEGMENTO AS È LA SEZIONE AUREA DEL SEGMENTO AB VALE LA SEGUENTE PROPORZIONE

$$AB : AS = AS : SB$$

INDICANDO CON ℓ LA MISURA DI AB E CON x LA MISURA DI AS, LA MISURA DI SB È $\ell - x$.

SOSTITUENDO

$$\ell : x = x : (\ell - x)$$

APPLICANDO LA PROPRIETÀ FONDAMENTALE DELLE PROPORZIONI

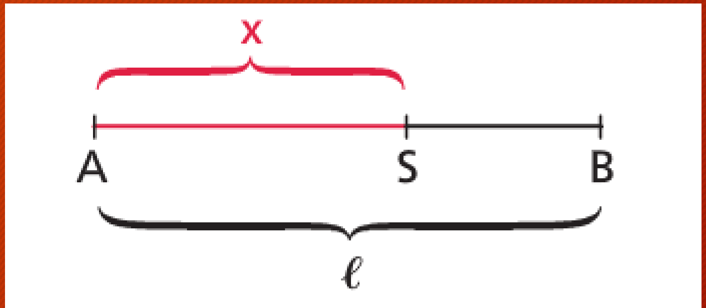
$$x^2 = \ell(\ell - x)$$

$$x^2 = \ell^2 - \ell x$$

$$x^2 + \ell x - \ell^2 = 0$$

CON $\Delta = \ell^2 + 4\ell^2 = 5\ell^2$ E

$$x = \frac{-\ell \pm \ell\sqrt{5}}{2} = \begin{cases} x = \dfrac{-\ell - \ell\sqrt{5}}{2} & \text{NON ACCETTABILE} \\[2ex] x = \dfrac{-\ell + \ell\sqrt{5}}{2} = \ell\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$



Conoscenze e abilità richieste:
- Operare con le proporzioni
- Operare con i radicali
- Risolvere equazioni di II grado

Risultato: la misura della sezione aurea di un segmento di lunghezza l è dato da:

$$AS = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot l$$

- Il rapporto tra il segmento e la sua sezione aurea è definito numero aureo ed è

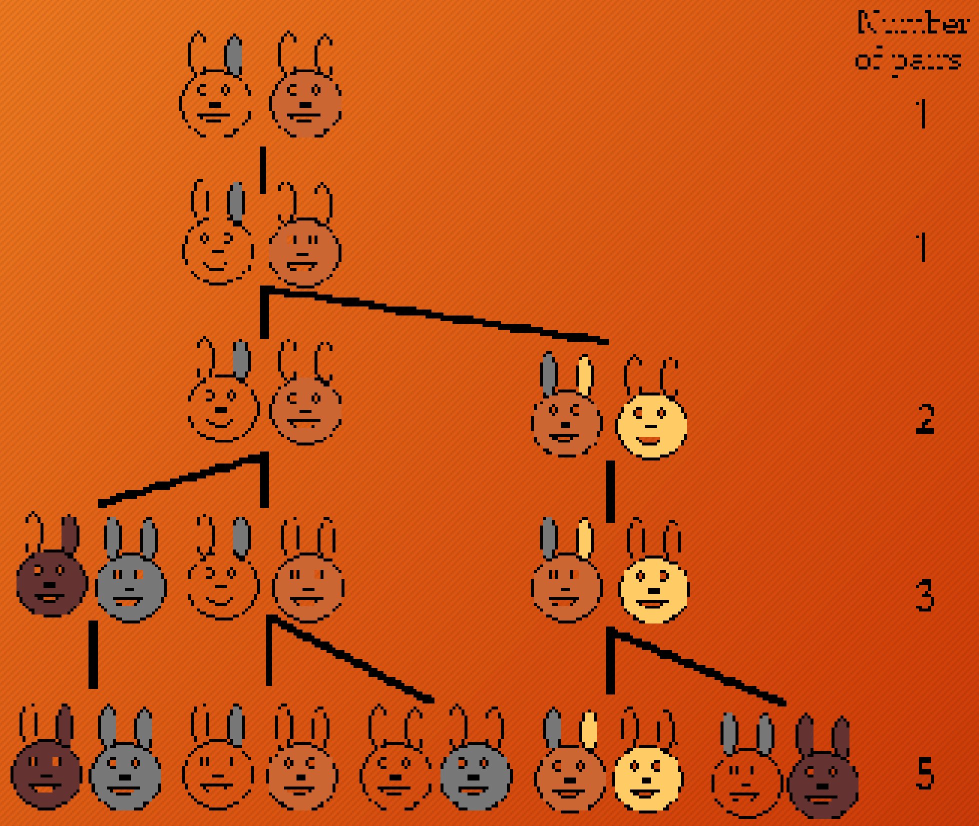
indicato con la lettera Φ , il suo valore è dato da

$$\Phi \qquad \frac{AB}{AS} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = 1{,}618033\ldots$$

La successione di Fibonacci

- In matematica, il numero d'oro, interviene nello studio della successione di Fibonacci: una successione in cui ogni termine è uguale alla somma dei due termini che lo precedono, dati i due termini iniziali 1 e 1.
- 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144 …………
- Il rapporto tra un termine della successione di Fibonacci e quello che lo precede si avvicina sempre di più a Φ al crescere dei termini della successione.
- La sezione aurea e la sequenza di Fibonacci appaiono frequentemente in natura.

LA RIPRODUZIONE DEI CONIGLI



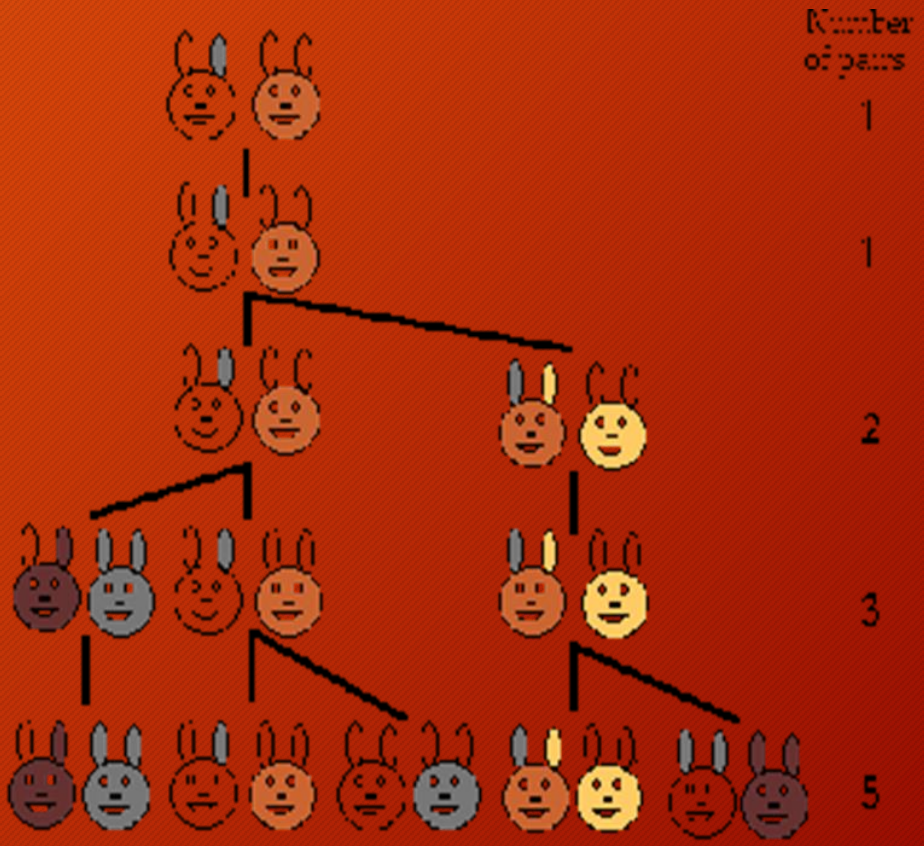
- *“Quante coppie di conigli verranno prodotte in un anno, a partire da un’unica coppia, se ogni mese ciascuna coppia dà alla luc una nuova coppia che diventa produttiva a partire dal secondo mese?*

In condizioni ideali una coppia di conigli è in grado di riprodursi già da un mese dopo la nascita.

La femmina è in grado di generare una seconda coppia di conigli già un mese dopo l’accoppiamento con il maschio.

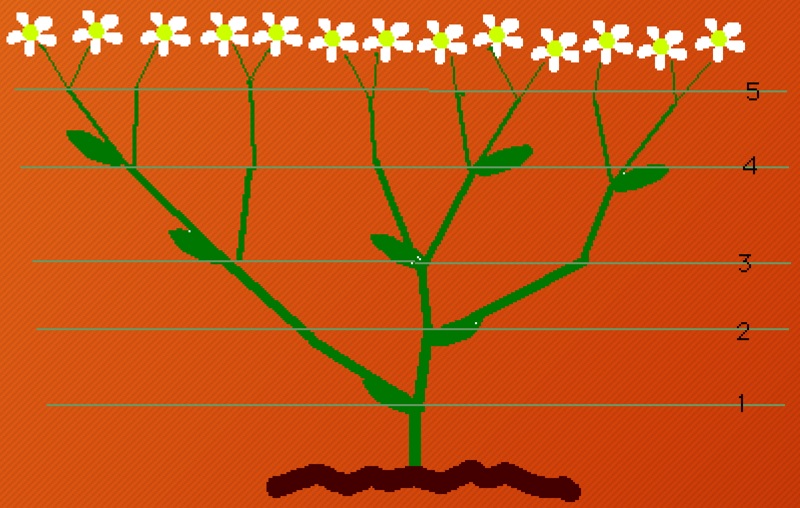
Si considera una coppia di conigli in un recinto

Come si vede dal grafico all’inizio dell’esperimento si ha **1** coppia di conigli. Dopo un mese c’è sempre **1** coppia di conigli. Dopo 2 mesi la femmina ha generato un’altra coppia di conigli, quindi nel recinto ne abbiamo **2**. Al terzo mese la prima coppia ne ha generata un’altra, mentre la seconda non è stata in grado di procreare, quindi nel recinto ci sono **3** coppie di conigli. Passato un altro mese le prime due coppie generano altre due coppie mentre la terza non procrea, quindi nel recinto ci sono **5** coppie di conigli e cosi via di mese in mese.



LA SEQUENZA DI FIBONACCI IN BOTANICA

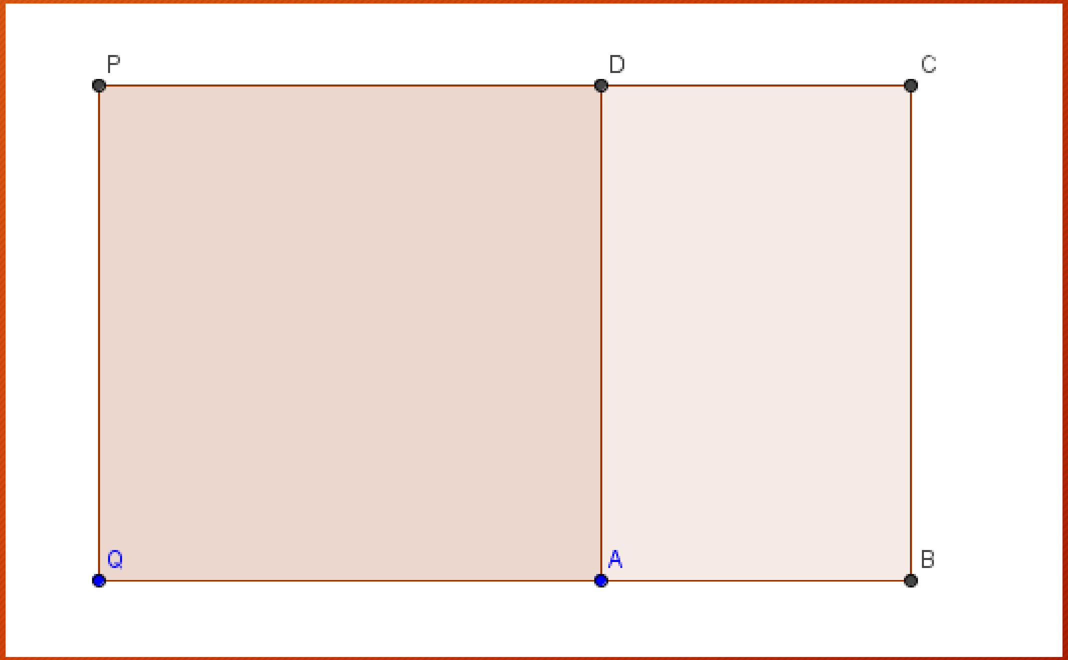
- La sequenza di Fibonacci si trova in molte piante e fiori. Ne è un esempio l'Achillea ptarmica



La crescita di questa pianta segue lo schema qui disegnato.
Ogni ramo impiega un mese prima di potersi biforcare.
Al primo mese quindi abbiamo **1** ramo, al secondo ne abbiamo **2**,
al terzo **3**,
al quarto **5** e così via.

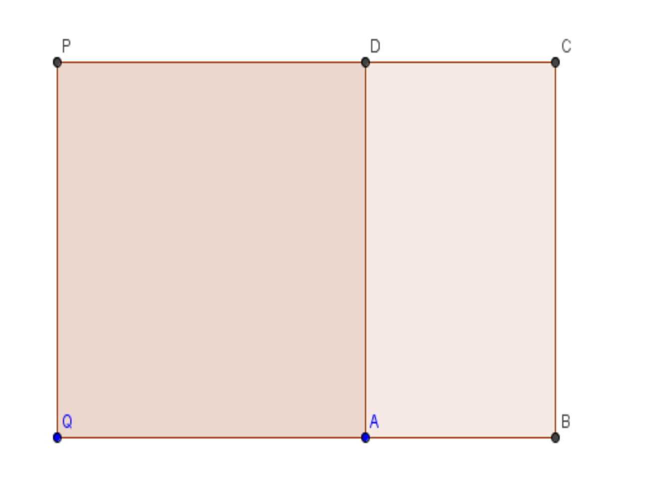
IL RETTANGOLO AUREO

- Il rettangolo aureo è un rettangolo che ha un lato che è la sezione aurea dell'altro.



Proprietà del rettangolo aureo

- Consideriamo il rettangolo aureo ABCD della figura, dunque per ipotesi AD:AB=AB: (AD-AB)
- Costruiamo esternamente al rettangolo il quadrato ADPQ di lato AD e consideriamo il rettangolo BCPQ.
- Dimostriamo che anche il rettangolo BCPQ è un rettangolo aureo.
- Applichiamo la proprietà del comporre alla precedente proporzione:
- (AD+AB): AD= (AB+AD-AB): AB
- (QA+AB):QA=QA:AB
- QB:QA=QA:AB
- QB:QP=QP: (QB-QP), quindi QP è la sezione aurea di QB e il rettangolo BCPQ è un rettangolo aureo.



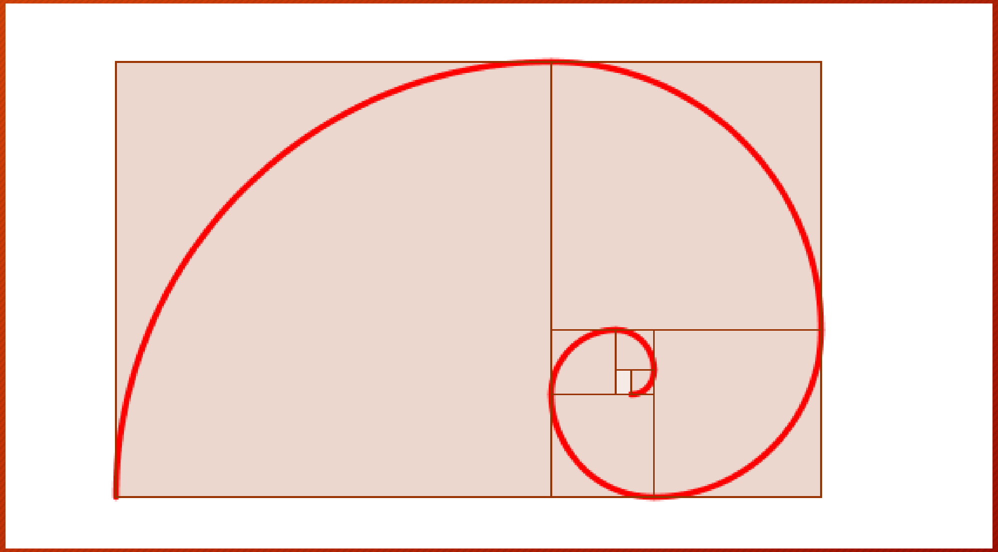
Costruzione del rettangolo aureo con Geogebra.

- Costruire un segmento AB
- Funzione poligono regolare costruire il quadrato di lato AB
- Funzione punto medio M di AB
- Funzione circonferenza di centro M passante per il vertice C del quadrato
- Retta AB e retta CD
- Funzione punto di intersezione P tra retta AB e circonferenza
- Funzione retta per P e perpendicolare ad AB
- Funzione punto di intersezione Q tra retta CD e retta perpendicolare.
- Funzione poligono APQD (rettangolo aureo).

Conoscenze e abilità richieste per la costruzione geometrica
•costruire figure geometriche (quadrati, rettangoli) tramite riga e compasso o software di geometria dinamica
•determinare il punto medio di un segmento
•trasportare un segmento
per la verifica algebrica
•teorema di Pitagora
•operare con radicali o calcolatrice

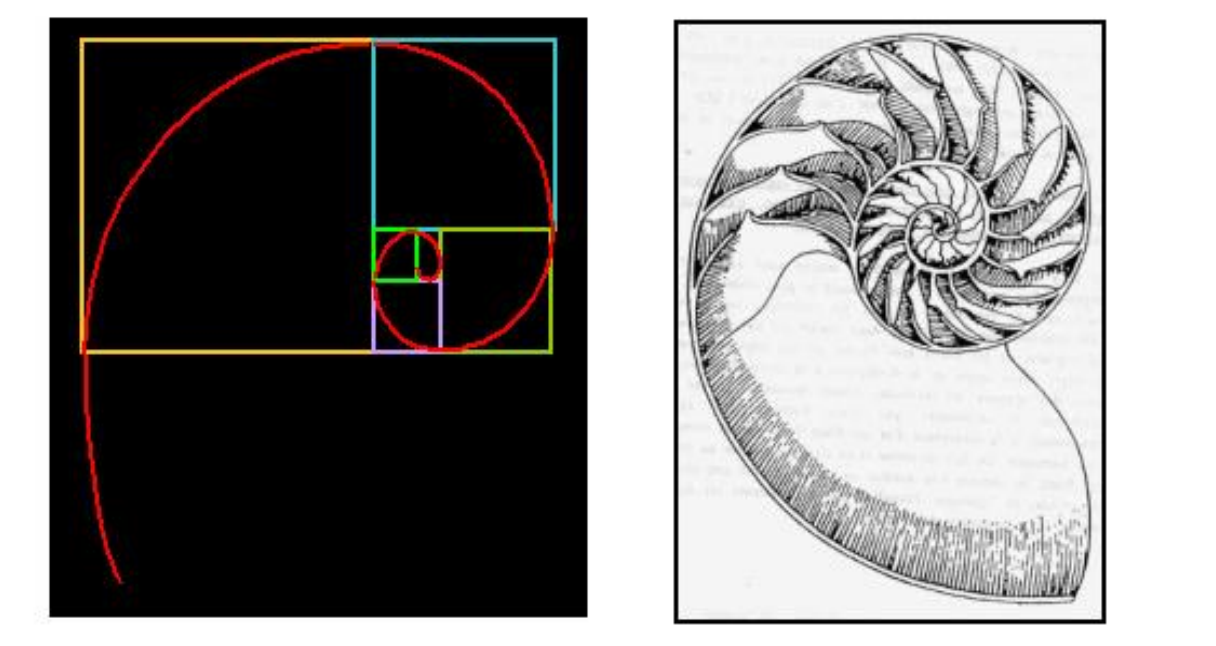
SPIRALE AUREA

Se partiamo da un rettangolo aureo e costruiamo sul lato minore un quadrato interno al rettangolo, quello che rimane è ancora un rettangolo aureo. L’operazione può continuare all’infinito, ritagliano quadrati che lasciano sempre rettangoli aurei. Tracciando in ogni quadrato un quarto di circonferenza, si ottiene una spirale logaritmica, nota come spirale aurea.



NAUTILUS

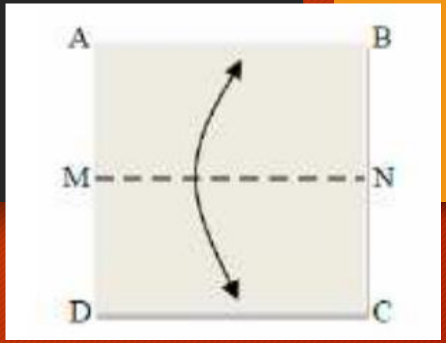
- La spirale logaritmica, che si ritrova sovente in natura, è l'unico tipo di spirale che allungandosi, mantiene sempre la stessa forma. Lo sviluppo armonico della forma è legato alla necessità degli esseri viventi di accrescere secondo natura in maniera ottimale e meno dispendiosa possibile. L'accrescimento avviene in modo che l'oggetto si mantenga simile a se stesso e questa proprietà è collegata al numero d'oro, infatti solo in un rettangolo aureo ritagliando il quadrato interno al rettangolo e costruito sul lato minore, si ottiene un rettangolo simile a quello originale. Per esempio le conchiglie di alcuni molluschi, come il Nautilus, hanno proprio la forma della spirale logaritmica, forma che non cambia quando la conchiglia cresce. La loro conchiglia sezionata ha come contorno una spirale aurea.

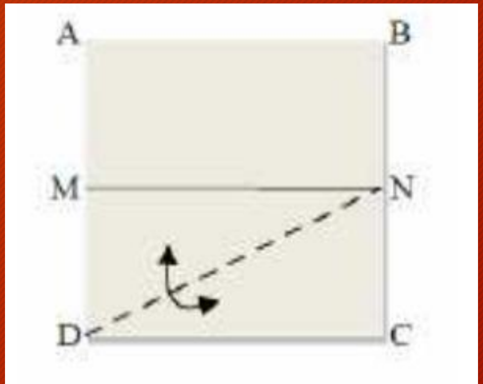


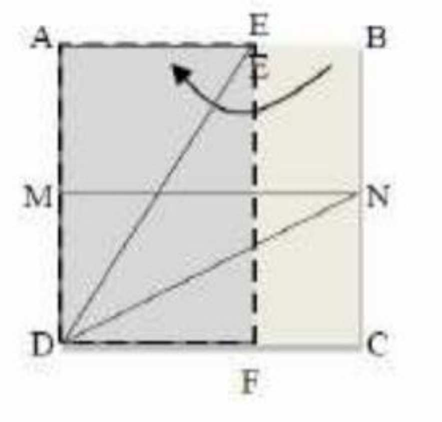
COSTRUZIONE DEL RETTANGOLO AUREO ATTRAVERSO LA PIEGATURA DI UN FOGLIO

- Istruzione per la costruzione:
- Prendi un foglio di carta e ricava un quadrato di lato AB
- Piega lunga la mediana MN e riapri
- Piega lungo la diagonale DN e riapri
- Piega lungo la bisettrice dell’angolo ADN portando il lato DA sul lato DN e riapri
- AE è la sezione aurea di AB
- Per ottenere il rettangolo aureo piega

  sovrapponendo BE al lato AE
- AEFD è il rettangolo aureo





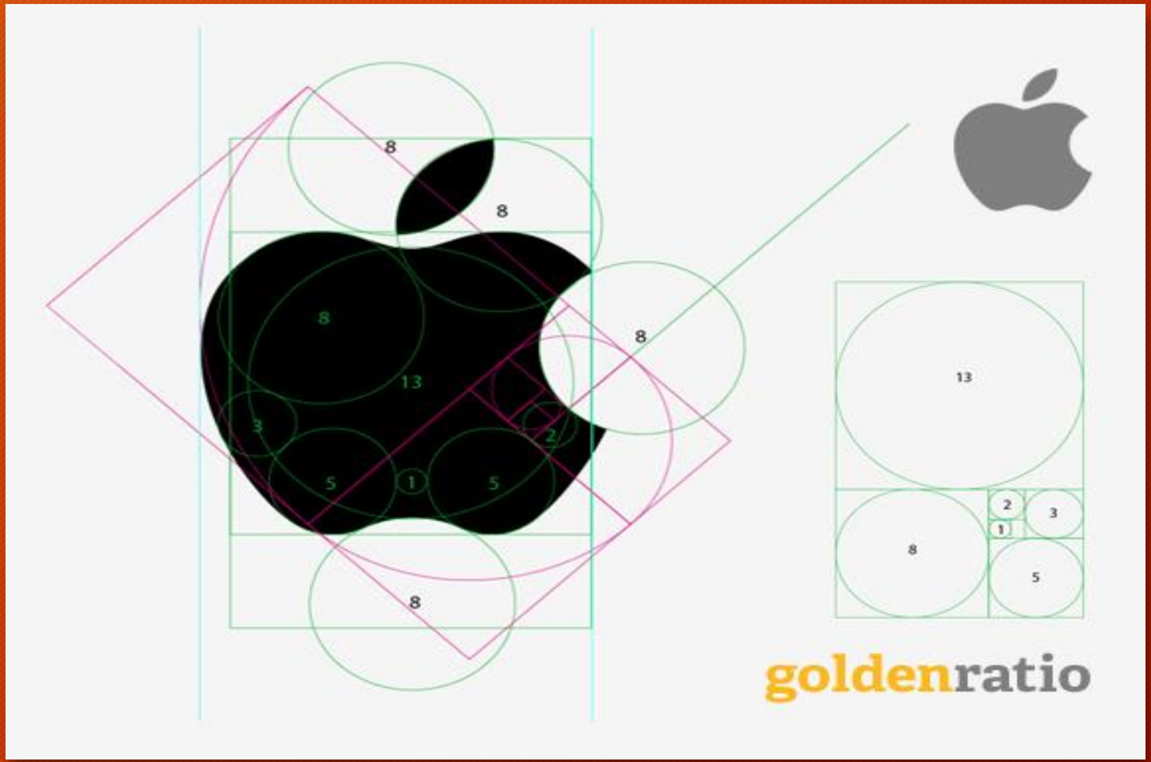


Apple, Twitter e i grandi loghi

costruiti con la sezione aurea

Logo della Apple

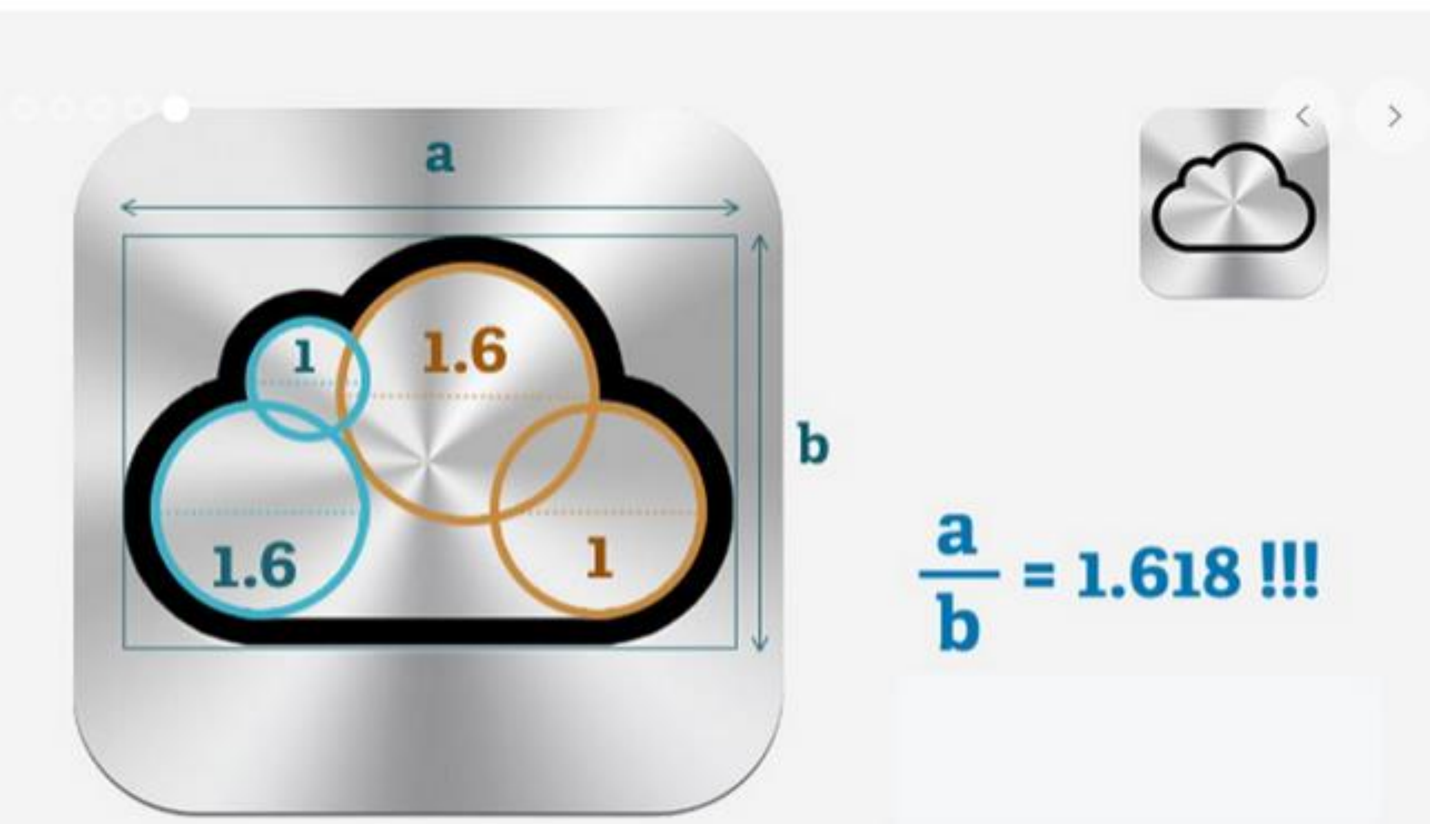
Il logo della Apple è composto interamente da cerchi i cui raggi danno i numeri della successione di Fibonacci



ICLOUD

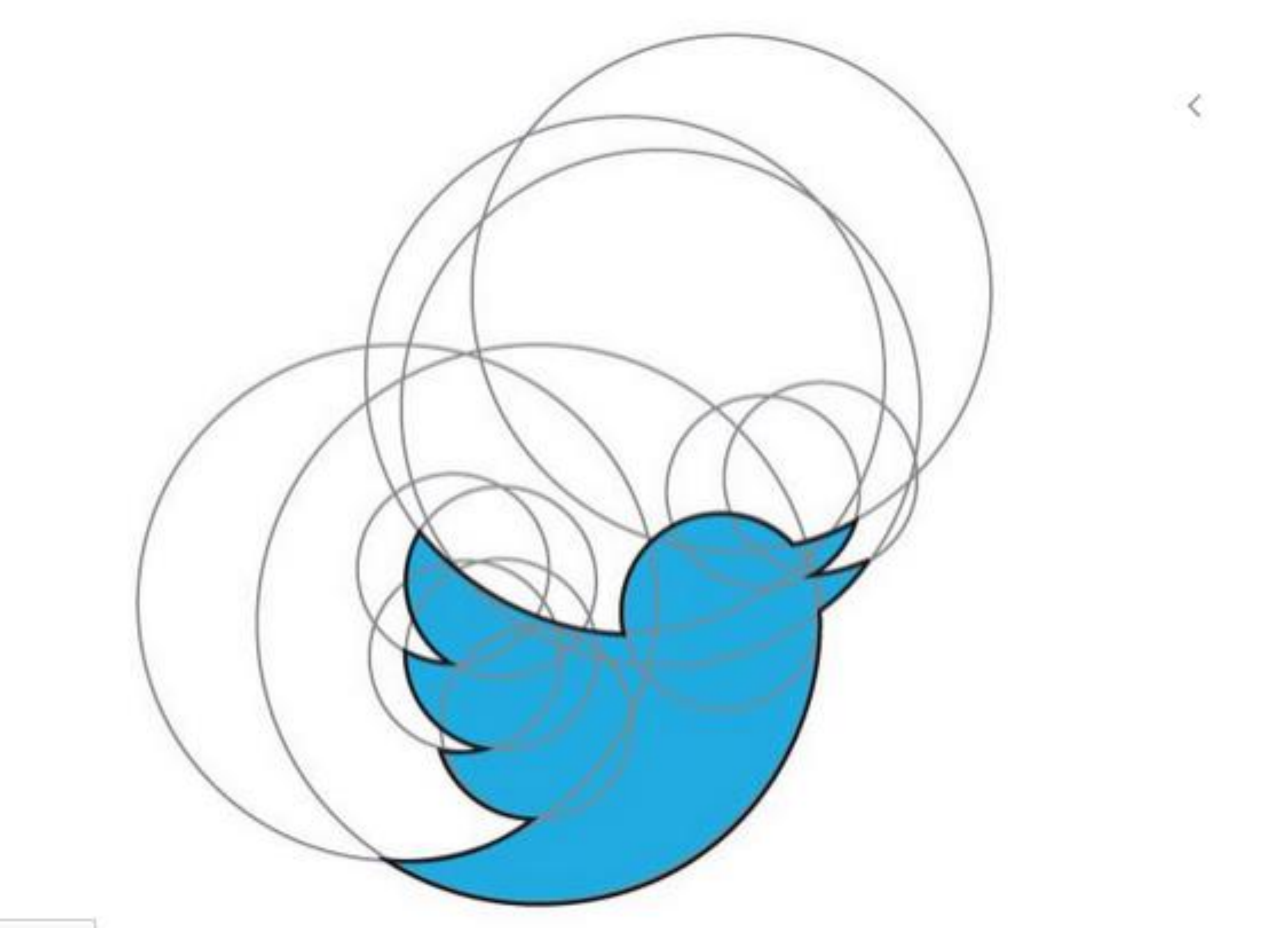
IL SIMBOLO DI ICLOUD E’ RACCHIUSO IN UN RETTANGOLO AUREO

E I DIAMETRI DELLE CIRCONFERENZE CHE LO GENERANO SONO NEL RAPPORTO AUREO



TWITTER

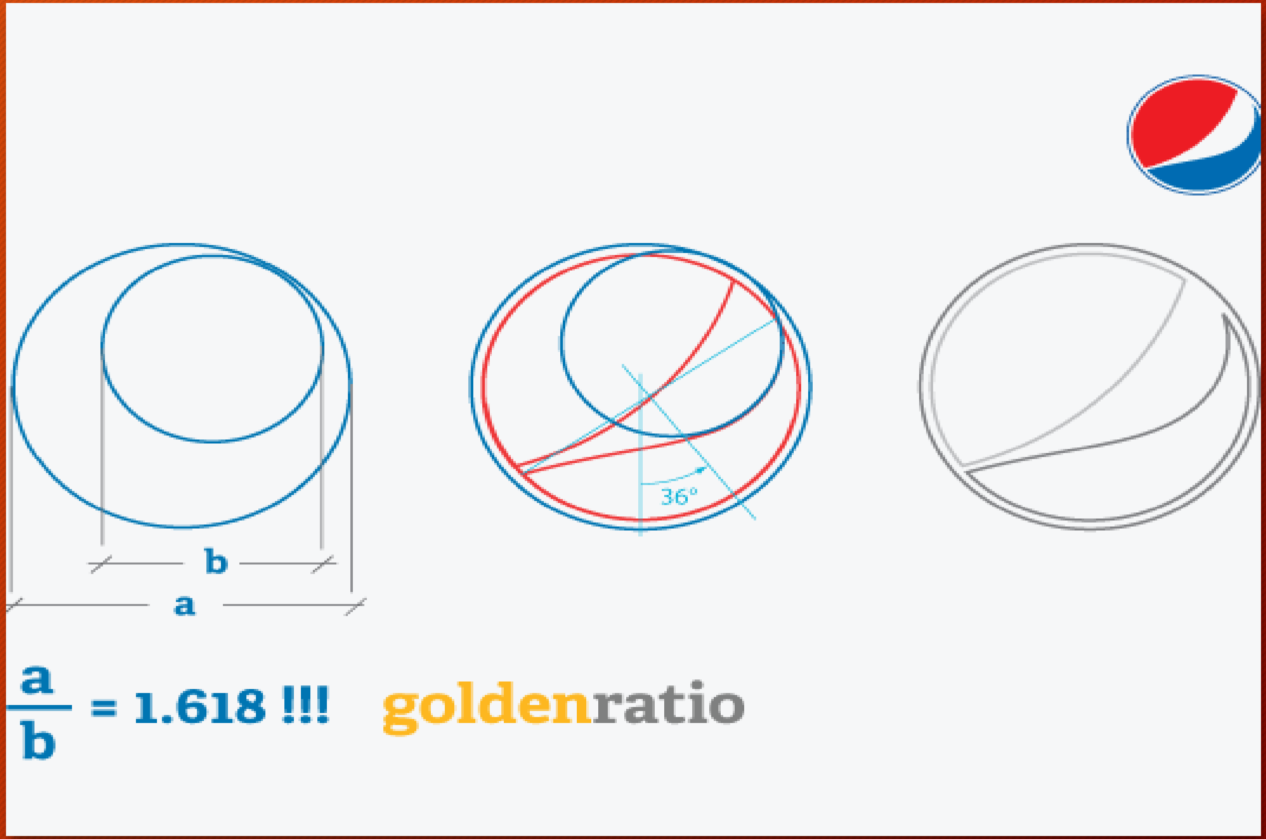
L'uccellino di Twitter, è stato costruito per mezzo di **circonferenze sovrapposte** aventi i diametri pari a numeri della sequenza di Fibonacci.

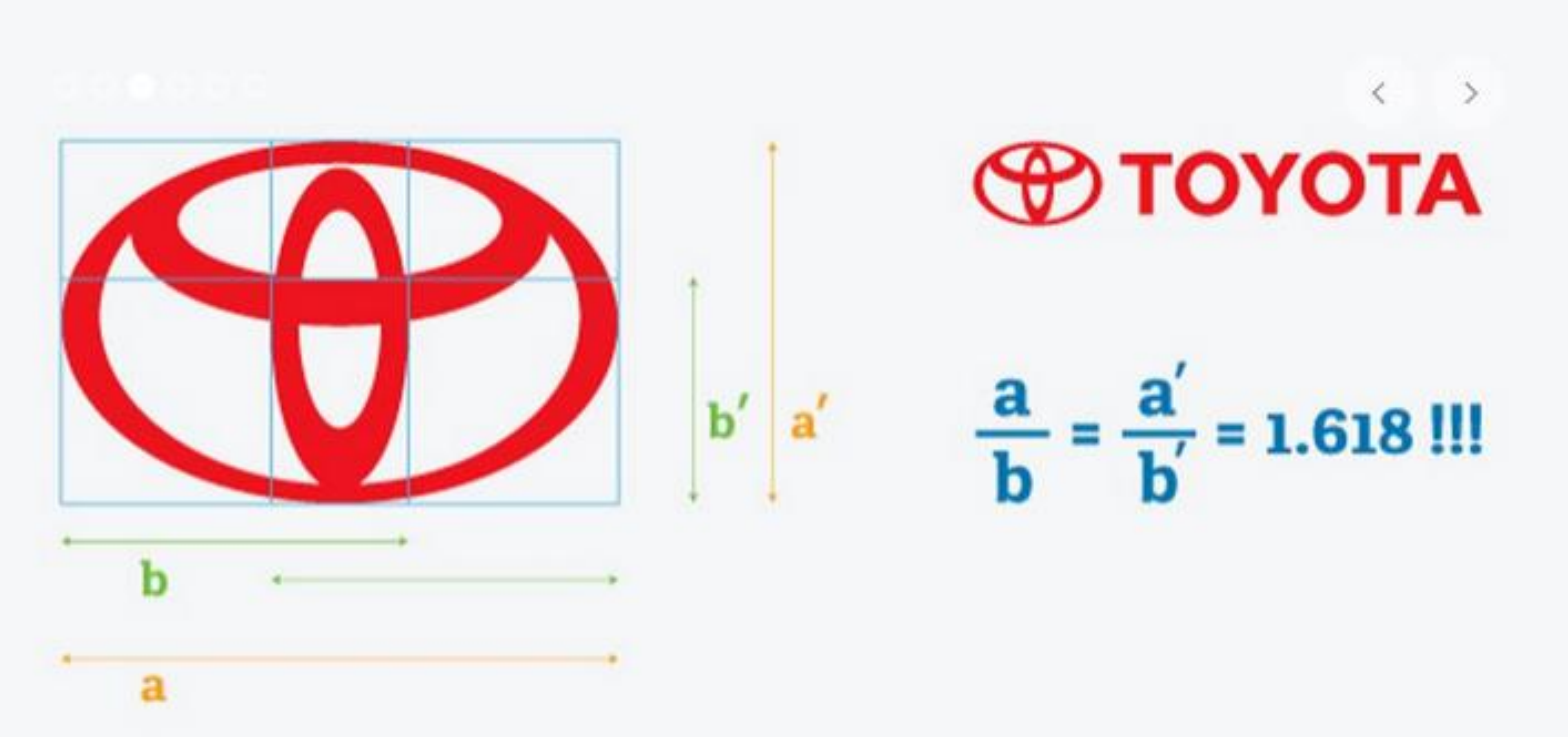


Ma non è finita qui: anche marchi come **Pepsi, Toyota e persino National Geographic** non si sono fatti sfuggire l'occasione di creare un logo identificativo che potesse essere il più gradevole possibile, garantendo –se non il sicuro successo alle aziende- una presentazione estetica armoniosa.

Logo della Pepsi Cola

Il logo della Pepsi Cola è composto anch'esso da alcune armoniose e "aureose" forme geometriche




TOYOTA
b′
a′
b
a
$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = 1.618$!!!


a
b
NATIONAL
GEOGRAPHIC