T

CAPITOLO 1

I NUMERI NATURALI

1 Che cosa sono i numeri naturali

▶ Esercizi a p. 24

▶ Completa inserendo il numero corretto.
Il precedente di 1000 è ____.
Il successivo di 77 è ____.
Il successivo di ____ è 1010.
Il precedente di ____ è 1.

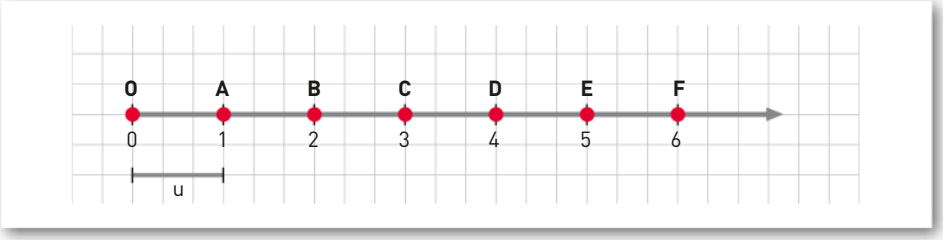
I numeri naturali sono:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

L'insieme di questi numeri viene indicato con la lettera $\mathbb{N}$.

I numeri naturali possono essere rappresentati su una **semiretta orientata**, cioè una semiretta sulla quale, a partire dell'origine *O*, fissiamo un verso di percorrenza, da sinistra verso destra, che indichiamo con una freccia. Fissiamo poi un'unità di misura *u*, e a partire dall'origine la riportiamo più volte sulla semiretta. A partire dall'origine a cui facciamo corrispondere lo 0, ci muoviamo verso destra passando di volta in volta al numero seguente.
Ogni numero naturale ha un successivo, il numero subito a destra sulla semiretta, e ogni numero naturale escluso lo 0 ha un precedente, il numero subito a sinistra sulla semiretta.
Per esempio 4 ha come precedente 3 e come successivo 5.

Il simbolo	Significa
$<$	minore
$>$	maggiore
$\leq$	minore o uguale
$\geq$	maggiore o uguale
$=$	uguale
$\neq$	diverso



Man mano che procediamo verso destra lungo la semiretta i numeri diventano sempre più grandi: ogni numero è maggiore di tutti quelli che lo precedono sulla semiretta.
Perciò dati due numeri naturali, diversi tra loro, è sempre possibile stabilire se il primo è maggiore del secondo o viceversa. Per indicare questa relazione si utilizzano i simboli maggiore ($>$) o minore ($<$). Per esempio $0 < 3$ e $5 > 2$.

▶ Completa inserendo i simboli $<$, $>$.
13 ____ 18; 0 ____ 5;
101 ____ 110; 99 ____ 0.

I punti della semiretta sono molti di più di quelli che corrispondono ai numeri naturali. Per esempio, fra *B* e *C* vi sono infiniti punti che non rappresentano numeri naturali.
Per indicare questo fatto si dice che $\mathbb{N}$ è un insieme **discreto**.

2 Le quattro operazioni

▶ Esercizi a p. 25

Gli operatori, gli operandi, il risultato

Con i numeri naturali si eseguono le **operazioni** di addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione. I due numeri con i quali si opera, cioè gli **operandi**, assumono nomi particolari, così come i risultati delle operazioni.

Nell'**addizione** il primo e il secondo operando sono gli **addendi**, il risultato è la **somma**.

Nella **sottrazione** il primo operando è il **minuendo**, il secondo operando è il **sottraendo**, il risultato è la **differenza**.

Nella **moltiplicazione** il primo e il secondo operando sono i **fattori**, il risultato è il **prodotto**.

Nella **divisione** il primo operando è il **dividendo**, il secondo operando è il **divisore**, il risultato è il **quoziente**.

addendi, somma: $3 + 4 = 7$, minuendo, differenza, sottraendo: $13 - 2 = 11$, fattori, prodotto: $5 \cdot 9 = 45$, dividendo, quoziente, divisore: $48 : 6 = 8$.

L'addizione e la moltiplicazione

Fra le quattro operazioni solo l'addizione e la moltiplicazione danno sempre come risultato un numero naturale. Per questo si dice che l'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni interne in** $\mathbb{N}$, oppure che $\mathbb{N}$ è **chiuso** rispetto a tali operazioni.

Listen to it

In an **addition**, the numbers involved are called *addends* and *sum*; in a **subtraction**, *minuend*, *subtrahend*, and *difference*; in a **multiplication**, factors and product; in a **division**, *dividend*, *divisor*, and *quotient*.

La sottrazione e la divisione

La sottrazione e la divisione sono definite rispettivamente in base all'addizione e alla moltiplicazione e agiscono in modo contrario rispetto a queste; per tale motivo sono anche chiamate **operazioni inverse**.

La **differenza** fra due numeri è quel numero che, addizionato al sottraendo, dà come somma il minuendo.

Per esempio: $5 - 3 = 2$, perché $2 + 3 = 5$.

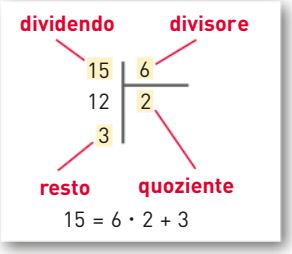
Non sempre esiste in $\mathbb{N}$ il risultato della sottrazione: il risultato di una sottrazione è un numero naturale se e solo se il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo, cioè la sottrazione non è un'operazione interna in $\mathbb{N}$.

Per esempio non esiste in $\mathbb{N}$ il risultato di $4 - 9$, perché non esiste un numero naturale n tale che $n + 9 = 4$.

Il **quoziente** fra due numeri è quel numero che, moltiplicato per il divisore, dà come prodotto il dividendo. Quindi, perché la divisione abbia senso *il divisore deve sempre essere diverso da* 0.

▶ Scrivi il nome degli operandi e del risultato di ciascuna operazione.
$7 + 6 = 13$; $7 - 6 = 1$
$10 \cdot 5 = 50$; $10 : 5 = 2$.

▶ Completa inserendo il segno di operazione.
- 10 ____ 2 = 12
- 10 ____ 2 = 20
- 10 ____ 2 = 8
- 10 ____ 2 = 5



ESEMPIO

1. $18 : 3 = 6$, perché $6 \cdot 3 = 18$.
2. $18 : 0$ è un'operazione impossibile, perché non esiste nessun numero che, moltiplicato per 0, dia 18.

Anche con il divisore diverso da 0, non sempre esiste per la divisione il risultato in $\mathbb{N}$, cioè la divisione non è un'operazione interna in $\mathbb{N}$.

Per esempio, il risultato di $15 : 6$ non esiste in $\mathbb{N}$, perché non esiste un numero naturale che, moltiplicato per 6, dia 15.

Nei numeri naturali è sempre possibile eseguire la **divisione non esatta** (con resto). In questo caso fra dividendo, divisore, quoziente e resto vale la relazione:

dividendo = divisore · quoziente + resto.

Solo se il resto è 0, ritorniamo al caso della divisione esatta.

Dai numeri alle lettere

▶ Calcola il risultato sostituendo alle lettere il valore indicato.
$2m + 3n$
- per $m = 4$, $n = 7$
- per $m = 5$, $n = 3$

In matematica le lettere offrono la possibilità di parlare non di un numero particolare, ma di un numero generico.
Il doppio di 4 è $2 \cdot 4$, il doppio di 100 è $2 \cdot 100$.
Se indichiamo con n un generico numero naturale, il suo doppio è $2 \cdot n$.
L'espressione $2 \cdot n$ ha un valore diverso a seconda del valore attribuito a n:

se $n = 4$, $\quad 2 \cdot n \quad$ diventa $\quad 2 \cdot 4 = 8$;

se $n = 100$, $\quad 2 \cdot n \quad$ diventa $\quad 2 \cdot 100 = 200$.

Quando vogliamo indicare un numero generico, usiamo quindi una lettera dell'alfabeto. A tale lettera viene dato il nome di **variabile numerica** (o, più brevemente, **variabile**); nell'esempio precedente n è una variabile.

Il numero 0

Addizione e sottrazione

Lo 0 sommato a qualsiasi numero dà come risultato il numero stesso. Ciò è vero indifferentemente quando 0 è il primo addendo o il secondo. Per questo motivo 0 è detto **elemento neutro dell'addizione**.
Non è invece possibile in $\mathbb{N}$ la sottrazione con il minuendo uguale a 0.

Se utilizziamo la variabile n, possiamo scrivere:

$$n + 0 = 0 + n = n, \ \forall n \in \mathbb{N},$$

dove il simbolo $\forall$ significa «per ogni» e $\in$ significa «che appartiene», per cui la scrittura precedente si legge «per ogni n che appartiene all'insieme $\mathbb{N}$».

ESEMPIO

1. $8 + 0 = 0 + 8 = 8$.
2. $0 - 6$ non ha risultato in quanto in $\mathbb{N}$ non esiste un numero che, sommato a 6, dia 0.

La somma di due numeri naturali è 0 soltanto se entrambi i numeri sono 0. Invece, quando la sottrazione dà come risultato 0, significa che il minuendo e il sottraendo sono uguali.

Per esempio: $7 - 7 = 0$ perché $0 + 7 = 7$.

Moltiplicazione e divisione

Nella moltiplicazione basta che lo 0 compaia una sola volta tra i fattori per annullare il prodotto. Lo 0 è quindi un numero che, moltiplicato per qualsiasi numero, dà come risultato se stesso. Per questo lo 0 viene detto **elemento assorbente della moltiplicazione**.

Per esempio: $7 \cdot 0 = 0 \cdot 7 = 0$; $5 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 200 = 0$.

In generale, $n \cdot 0 = 0 \cdot n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nella moltiplicazione vale la **legge di annullamento del prodotto**: affinché un prodotto sia 0 è *necessario* e *sufficiente* che sia 0 almeno uno dei suoi fattori.

È necessario significa che se il prodotto è 0, almeno uno dei fattori deve essere 0.

È sufficiente significa che se uno dei fattori è 0, anche il prodotto è uguale a 0.

Nella divisione, quando il dividendo è 0, il quoziente è 0.

Per esempio: $0 : 4 = 0$ perché $0 \cdot 4 = 0$.

Non è possibile la divisione con il divisore uguale a 0.

ESEMPIO $6 : 0$ non ha significato. Infatti non è possibile trovare un numero che moltiplicato per 0 dia come risultato 6.

In casi come questo si dice che l'operazione *è impossibile*.

Anche la divisione $0 : 0$ non viene definita. Infatti ogni numero, moltiplicato per 0, dà come risultato 0: la divisione non potrebbe quindi avere un unico risultato. In casi come questo si dice che l'operazione *è indeterminata*.

▶ Completa le seguenti uguaglianze quando è possibile.

- $5 \cdot \square = 0$
- $6 + \square = 6$
- $\square : 7 = 0$
- $9 : 0 = \square$
- $10 - \square = 10$
- $0 - \square = 3$

Il numero 1

Moltiplicando qualsiasi numero per 1 si ottiene come risultato il numero stesso, indifferentemente quando 1 è il primo fattore o il secondo. Per questo 1 è detto **elemento neutro della moltiplicazione**.

Per esempio: $5 \cdot 1 = 1 \cdot 5 = 5$.

In generale, $n \cdot 1 = 1 \cdot n = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Nella divisione, quando il divisore è 1, il quoziente coincide con il dividendo. Se la divisione ha quoziente 1, il dividendo e il divisore sono uguali.

ESEMPIO

$16 : 1 = 16$ perché $16 \cdot 1 = 16$.

$8 : 8 = 1$ perché $1 \cdot 8 = 8$.

▶ Completa le seguenti uguaglianze quando è possibile.

- $7 \cdot \square = 7$
- $12 : \square = 12$
- $1 : \square = 6$
- $1 \cdot \square = 9$
- $1 - \square = 1$
- $\square - 1 = 1$

TEORIA

3 Le potenze

▶ Esercizi a p. 26

Ci sono moltiplicazioni particolari nelle quali tutti i fattori sono uguali.

Per esempio: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Per evitare scritture così lunghe è stata introdotta una nuova operazione, la **potenza**: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ si scrive 2^7 (si legge «2 alla settima»).
Il numero 2 è la **base** e il numero 7 è l'**esponente** della potenza. La base indica quale fattore viene moltiplicato per se stesso, l'esponente indica il numero di fattori uguali. Dunque:

Listen to it

In the **power** a^n, a is called **base** and n is called **exponent**.

se l'esponente è maggiore di 1, la potenza è il prodotto di tanti fattori quanti vengono indicati dall'esponente, tutti uguali alla base.

▶ Calcola le seguenti potenze.
2^7; 2^5; 3^4; 5^2; 5^3; 6^2; 2^6.

Usando le lettere: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$.

È ragionevole pensare che l'esponente sia maggiore o uguale a 2, per avere almeno una moltiplicazione, ossia due fattori. Tuttavia vogliamo dare un significato anche a **potenze con esponente 1 o esponente 0**.

Per definizione:

- **elevando a 0 un numero naturale diverso da 0 si ottiene 1:**

  $a^0 = 1 \quad \text{se} \quad a \neq 0;$
- **elevando a 1 un numero naturale si ottiene il numero stesso:** $a^1 = a$.

Non viene invece definita la potenza con base ed esponente uguale a 0:

0^0 non ha significato.

ESEMPIO

1. Potenze con esponente 0:

   $2^0 = 1$; $\quad 2008^0 = 1$; $\quad 1^0 = 1$; $\quad 0^0$ non ha significato.

2. Potenze con esponente 1:

   $2^1 = 2$; $\quad 2008^1 = 2008$; $\quad 1^1 = 1$; $\quad 0^1 = 0$.

4 Le espressioni con i numeri naturali

▶ Esercizi a p. 27

Se vogliamo eseguire una sequenza di operazioni con i numeri naturali risolviamo un'espressione.

Per esempio: $3^4 + 2 \cdot 5^2 - 3 + 20 : 2^2$.

Le operazioni vanno eseguite con un **ordine** ben preciso: prima vengono calcolate le potenze, poi le moltiplicazioni e le divisioni, nell'ordine in cui sono scritte, infine le addizioni e le sottrazioni, sempre nell'ordine in cui sono scritte.

Ciò significa che alcune operazioni hanno la precedenza rispetto ad altre. Moltiplicazioni e divisioni hanno pari precedenza, così come addizioni e sottrazioni.

ESEMPIO

$10 + 2 \cdot 3 = 10 + 6 = 16.$

La moltiplicazione ha priorità sull'addizione e va quindi svolta per prima.

$10 + 2 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36$ è sbagliato!

Semplificare un'espressione significa sostituirla con una più semplice che abbia lo stesso valore.

ESEMPIO Semplifichiamo l'espressione:

$3^4 + 2 \cdot 5^2 - 3 + 20 : 2^2 =$

Calcoliamo le potenze:

$81 + 2 \cdot 25 - 3 + 20 : 4 =$

Eseguiamo la moltiplicazione e la divisione:

$81 + 50 - 3 + 5 =$

Eseguiamo nell'ordine in cui le incontriamo le addizioni e la sottrazione:

$133.$

▶ Semplifica le seguenti espressioni.

- $12 : 3 + 7 \cdot 4 - 5 \cdot 2 + 2^3$
- $3^2 + 125 : 5 - 18 : 6 + 4^2 : 2 - 1$

Le espressioni con le parentesi

A che cosa servono le parentesi in un'espressione? Ad alterare la priorità delle operazioni, cioè a modificare l'ordine con cui devono essere svolte.

Se abbiamo

$20 : 2^2 =$

eseguiamo prima la potenza:

$20 : 4 = 5.$

Se abbiamo

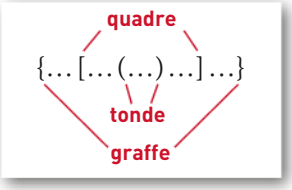
$(20 : 2)^2 =$

eseguiamo prima la divisione:

$10^2 = 100.$

▶ Semplifica la seguente espressione.
$\{[(21 : 3)^2 - 5 \cdot 2^3] : 3 + 2 \cdot 13 - 1\} : 2^2$

Occorre eseguire prima i calcoli presenti all'interno delle parentesi *tonde*, poi quelli all'interno delle *quadre* e infine quelli all'interno delle *graffe*.



ESEMPIO

$\{2^5 - [15^2 - (20 : 2)^2 \cdot 2]\} \cdot 5 =$

$\{32 - [225 - 10^2 \cdot 2]\} \cdot 5 =$

$\{32 - 25\} \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35.$

Le espressioni e le lettere

Con le variabili possiamo scrivere espressioni letterali, per esempio:

$$2 \cdot a - b + 3 \cdot a^2.$$

Il simbolo di moltiplicazione fra variabile e numero, o fra variabili, può essere sottinteso.

Per esempio, l'espressione precedente può essere scritta:

$$2a - b + 3a^2.$$

Quando una variabile compare più volte nella stessa espressione, essa rappresenta sempre lo stesso numero.

Possiamo calcolare il valore di un'espressione per particolari valori attribuiti alle lettere.

Per esempio, prendendo $a = 5$ e $b = 10$, sostituendo i valori alle lettere, otteniamo per l'espressione precedente:

$$2 \cdot 5 - 10 + 3 \cdot 5^2 = 75.$$

Invece, se $a = 2$ e $b = 3$, l'espressione vale:

$$2 \cdot 2 - 3 + 3 \cdot 2^2 = 4 - 3 + 3 \cdot 4 = 1 + 12 = 13.$$

▶ Scrivi in simboli l'espressione: «Dati due numeri *a* e *b*, al doppio del successivo di *a* aggiungi il prodotto tra il quadrato del precedente di *b* e 8». Calcola il valore dell'espressione per $a = 7$ e $b = 11$. Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.

Video

▶ Dati i numeri *a* e *b*, scrivi in simboli le seguenti espressioni, calcolando poi il loro valore per i valori assegnati ad *a* e *b*.

a. La differenza fra il cubo di *a* e il cubo del doppio di *b*; $a = 3$, $b = 1$.

b. La somma del triplo prodotto di *a* e *b* e del doppio della loro differenza; $a = 5$, $b = 4$.

c. Il prodotto fra il quadrato della somma di *a* e *b* e la somma dei loro quadrati; $a = 1$, $b = 2$.

Animazione

5 Le proprietà delle operazioni

▶ Esercizi a p. 36

Le seguenti proprietà sono dette **proprietà formali** delle operazioni. Esse valgono indipendentemente dai particolari numeri ai quali scegliamo di applicarle.

La proprietà commutativa

Proprietà commutativa dell'addizione
In un'addizione, se si cambia l'ordine degli addendi, la somma non cambia.

$$\boldsymbol{a + b = b + a}$$

Per esempio: $5 + 4 = 4 + 5$.

Proprietà commutativa della moltiplicazione
In una moltiplicazione, se si cambia l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Per esempio: $4 \cdot 2 = 2 \cdot 4$.

La proprietà commutativa non vale né per la sottrazione né per la divisione. Per esempio,

$$15 - 3 = 12,$$

mentre $3 - 15$ non è nemmeno un numero naturale.

La proprietà associativa

Proprietà associativa dell'addizione
La somma di tre numeri non cambia se si associano diversamente gli addendi, lasciando invariato il loro ordine.

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Per esempio: $(3 + 6) + 4 = 3 + (6 + 4)$.

La proprietà associativa fa sì che, in una sequenza di addizioni, possiamo sostituire a due addendi consecutivi la loro somma: il risultato non cambia.

Per esempio: $5 + 7 + 3 + 2 = 5 + 10 + 2$.

Leggendo l'uguaglianza da destra a sinistra, possiamo anche dire che la somma di due o più numeri naturali non cambia se sostituiamo a un suo addendo due numeri naturali che abbiano per somma tale addendo.

Proprietà associativa della moltiplicazione
Il prodotto di tre numeri non cambia se si associano diversamente i fattori, lasciando invariato il loro ordine.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Per esempio: $(6 \cdot 4) \cdot 5 = 6 \cdot (4 \cdot 5)$.

La proprietà associativa fa sì che, in una sequenza di moltiplicazioni, possiamo sostituire a due fattori consecutivi il loro prodotto: il risultato non cambia.

Per esempio: $3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot 7 \cdot 10$.

Leggendo l'uguaglianza da destra a sinistra, possiamo anche dire che il prodotto di due o più numeri naturali non cambia se sostituiamo a un suo fattore due numeri naturali che abbiano per prodotto tale fattore.

In una sequenza di addizioni (o moltiplicazioni), applicando le proprietà commutativa e associativa più volte, è sempre possibile spostare in qualunque posizione uno o più addendi (o fattori).

ESEMPIO

$(5 + 3) + 7 = (7 + 3) + 5.$

Infatti, per la proprietà associativa dell'addizione:

$(5 + 3) + 7 = 5 + (3 + 7) =$

Per la proprietà commutativa:

$5 + (7 + 3) = (7 + 3) + 5.$

La proprietà associativa non vale né per la sottrazione né per la divisione.
Per esempio:

$(10 - 3) - 1 \neq 10 - (3 - 1);$

$(24 : 4) : 2 \neq 24 : (4 : 2).$

La proprietà distributiva

▶ Verifica con un esempio che la proprietà distributiva dell'addizione rispetto alla moltiplicazione non è valida.

Proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione
Quando si deve moltiplicare un numero per una somma, si può moltiplicare quel numero per ciascun addendo e poi sommare i prodotti ottenuti, e il risultato non cambia.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Per esempio: $5 \cdot (4 + 2) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 2.$

Abbiamo formulato la proprietà in modo che il fattore da distribuire sia quello di sinistra. In tal caso si parla di proprietà distributiva **a sinistra**. Poiché la moltiplicazione è commutativa, la proprietà distributiva vale anche **a destra**.

Per esempio: $(3 + 4) \cdot 5 = 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5.$

Leggendo le uguaglianze dei due esempi precedenti da destra verso sinistra, si può ricavare la regola del **raccoglimento a fattore comune**: quando in una somma tutti gli addendi presentano un fattore in comune, esso può essere raccolto moltiplicandolo per la somma degli altri termini.

In simboli:

$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c);$

$b \cdot a + c \cdot a = (b + c) \cdot a.$

Per esempio: $9 \cdot 8 + 9 \cdot 2 = 9 \cdot (8 + 2).$

▶ Verifica con un esempio che la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto alla sottrazione è valida.

La proprietà distributiva della moltiplicazione e il raccoglimento a fattore comune valgono anche rispetto alla sottrazione.

In simboli:

$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \quad \text{con } b \geq c.$

Proprietà distributiva della divisione rispetto all'addizione
Quando si deve dividere una somma per un numero, si può dividere ciascun addendo per quel numero e poi sommare i quozienti ottenuti, e il risultato non cambia.

Per esempio: $(20 + 4) : 2 = 20 : 2 + 4 : 2$.

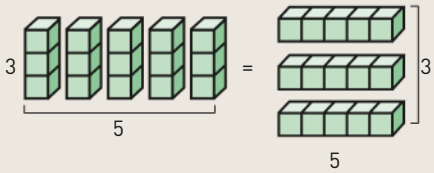
La proprietà vale solo a destra (la divisione non è commutativa).

La proprietà può essere espressa in lettere:

$$(a + b) : c = a : c + b : c, \qquad \text{con } c \neq 0 \text{ e quando le divisioni sono possibili.}$$

▶ Verifica con un esempio che la proprietà distributiva della divisione è vera anche rispetto alla sottrazione.

▶ Lo schema della figura interpreta graficamente la proprietà commutativa della moltiplicazione. Inventa altri schemi grafici che interpretino le proprietà commutativa e associativa dell'addizione, la proprietà associativa della moltiplicazione, la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.
Confrontali con quelli che proponiamo nel video.



Video

La proprietà invariantiva

Proprietà invariantiva della sottrazione
In una sottrazione, se si aggiunge o si toglie uno stesso numero sia al minuendo sia al sottraendo, la differenza non cambia.

Per esempio: $15 - 8 = (15 + 2) - (8 + 2)$.

In lettere:

$$a - b = (a + c) - (b + c), \qquad \text{con } a \geq b;$$

$$a - b = (a - c) - (b - c), \qquad \text{con } a \geq b \geq c.$$

Proprietà invariantiva della divisione
In una divisione, se si moltiplica o si divide per uno stesso numero, *diverso da* 0, sia il dividendo sia il divisore, il quoziente non cambia.

▶ Verifica con degli esempi che la proprietà invariantiva non vale né per l'addizione né per la moltiplicazione.

Se dividiamo il dividendo e il divisore per uno stesso numero, questo deve essere un divisore di entrambi.

ESEMPIO

$$60 : 15 = (60 \cdot 2) : (15 \cdot 2); \qquad 60 : 15 = (60 : 3) : (15 : 3).$$

In lettere:

$$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n), \qquad \text{con } b \neq 0,\ n \neq 0 \text{ e quando le divisioni sono possibili;}$$

$$a : b = (a : n) : (b : n), \qquad \text{con } b \neq 0,\ n \neq 0 \text{ e quando le divisioni sono possibili.}$$

▶ Completa le seguenti uguaglianze e scrivi la proprietà applicata.

a. $(14 + 8) + \square = \square + (8 + 9)$

b. $\square \cdot (\square + 2) = 8 \cdot 5 + 8 \cdot \square$

c. $46 - \square = (46 + \square) - (18 + 2)$

d. $(60 + \square) : 4 = \square : 4 + 8 : \square$

e. $(15 + \square) \cdot 4 = \square \cdot (15 + 3)$

f. $\square : 45 = (270 : 9) : (45 : \square)$

Animazione

6 Le proprietà delle potenze

▶ Esercizi a p. 37

Il prodotto di potenze di uguale base

Consideriamo la moltiplicazione $4^2 \cdot 4^3$.
Per la definizione di potenza,

$$4^2 \cdot 4^3 = \underbrace{4 \cdot 4}_{2 \text{ volte}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{5 \text{ volte}} = 4^5,$$

ossia: $\mathbf{4^2 \cdot 4^3 = 4^{2+3}}$.

Poiché 0^0 non ha significato, in tutte le proprietà delle potenze che esaminiamo, l'esponente e la base di una stessa potenza non possono essere contemporaneamente nulli.

Prima proprietà delle potenze
Il prodotto di potenze di uguale base è una potenza con la stessa base avente come esponente la somma degli esponenti.

$$\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

La definizione data per le potenze con esponente 1 o 0 è tale da verificare la prima proprietà.

Infatti:

$$6^4 \cdot 6^0 = 6^4 \cdot 1 = 6^4; \quad 6^4 \cdot 6^0 = 6^{4+0} = 6^4.$$

Il quoziente di potenze di uguale base

Consideriamo la divisione $4^7 : 4^3$.
Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per 4^3, dia come prodotto 4^7.

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{7 \text{ volte}} = \overset{?}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}}$$

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{7 \text{ volte}} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{(7-3) \text{ volte}} \cdot \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3 \text{ volte}}$$

Il numero cercato è 4^4; quindi possiamo scrivere: $\mathbf{4^7 : 4^3 = 4^{7-3}}$.

Seconda proprietà delle potenze
Il quoziente di potenze di uguale base (con l'esponente della seconda minore o uguale all'esponente della prima e con la base diversa da 0) è una potenza con la stessa base che ha come esponente la differenza degli esponenti.

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}, \text{ con } m \geq n, \ a \neq 0$$

Se gli esponenti sono uguali, si ha, per esempio: $4^7 : 4^7 = 4^{7-7} = 4^0$. Poiché un numero diviso per se stesso è uguale a 1, abbiamo $4^7 : 4^7 = 1$; confrontando le due uguaglianze è giusto porre: $a^0 = 1$.

In generale:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1.$$

La potenza di una potenza

Consideriamo 4^2 come base di un'altra potenza con esponente 3: $(4^2)^3$.

Per definizione di potenza: $(4^2)^3 = 4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2$.

Per la prima proprietà delle potenze: $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2 = 4^{2+2+2} = 4^{2 \cdot 3}$.

Quindi: $\mathbf{(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3}}$.

Terza proprietà delle potenze
La potenza di una potenza è una potenza che ha la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Il prodotto di potenze di uguale esponente

Scriviamo in altro modo un prodotto fra potenze con lo stesso esponente, per esempio $4^2 \cdot 6^2$, utilizzando proprietà note.

Per la definizione di potenza: $4^2 \cdot 6^2 = 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6$.

Applichiamo le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione:

$$4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 = (4 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 6).$$

Per la definizione di potenza: $(4 \cdot 6) \cdot (4 \cdot 6) = (4 \cdot 6)^2$.

Quindi: $\mathbf{4^2 \cdot 6^2 = (4 \cdot 6)^2}$.

Quarta proprietà delle potenze
Il prodotto di potenze di uguale esponente è una potenza che ha per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Il quoziente di potenze di uguale esponente

Consideriamo un quoziente fra potenze con lo stesso esponente: $12^2 : 4^2$.
Poiché la divisione è l'operazione inversa della moltiplicazione, stiamo cercando quel numero che, moltiplicato per 4^2, dia come prodotto 12^2.

Mostriamo che quel numero è $(12 : 4)^2$, cioè che:

$$(12 : 4)^2 \cdot 4^2 = 12^2.$$

Per la quarta proprietà delle potenze:

$$(12 : 4)^2 \cdot 4^2 = [(12 : 4) \cdot 4]^2 = 12^2.$$

Quindi: $\mathbf{12^2 : 4^2 = (12 : 4)^2}$.

► Calcola il risultato delle seguenti espressioni, indicando le proprietà delle potenze utilizzate.
$2^3 \cdot 2^2$; $9^{13} : 9^{11}$; $(2^3)^2$; $2^4 \cdot 5^4$; $8^5 : 8^3$.

TEORIA

Quinta proprietà delle potenze
Il quoziente di potenze di uguale esponente è una potenza che ha per base il quoziente delle basi e per esponente lo stesso esponente.

$$a^n : b^n = (a : b)^n, \text{ con } b \neq 0$$

Osservazione. Le cinque proprietà delle potenze si basano sul fatto che la potenza è una moltiplicazione ripetuta, quindi riguardano solo la moltiplicazione e la sua inversa, la divisione. Per l'addizione e la sottrazione di potenze non si può ricavare alcuna proprietà.

▶ Semplifica la seguente espressione: $\left[(3^3 \cdot 2^7 \cdot 3^4)^3 : 6^{17}\right] : 3^4$. Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.

Video

▶ Verifica che:
- $2^5 - 2^3 \neq 2^{5-3}$;
- $4^2 + 6^2 \neq (4+6)^2$;
- $12^2 - 4^2 \neq (12-4)^2$.

ESEMPIO

$$4^2 + 4^3 \neq 4^{2+3}.$$

Infatti $4^2 + 4^3 = 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 + 64 = 80,$

mentre $4^{2+3} = 4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024.$

7 I multipli e i divisori di un numero

▶ Esercizi a p. 41

Listen to it

If a natural number *a* can be expressed as the number *b* times another number, then *a* is a **multiple** of *b*.

DEFINIZIONE
Un numero naturale *a* è **multiplo** di un numero naturale *b* se esiste un numero *c* che moltiplicato per *b* dà *a*.

$$a = c \cdot b$$

Attraverso la moltiplicazione possiamo trovare per ogni numero, diverso da 0, infiniti multipli: basta moltiplicare il numero per 0, 1, 2, 3, 4, ... (il numero 0 ha invece come unico multiplo se stesso).

Per esempio i multipli di 8 sono: 0, 8, 16, 24, 32, 40, ...

Per indicarli sinteticamente possiamo scrivere:

$$8 \cdot n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

I multipli di 2 sono i **numeri pari** e si indicano con:

$$2 \cdot n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

▶ Scrivi i primi cinque multipli dei seguenti numeri:
6; 11; 15; 16.

DEFINIZIONE
Un numero naturale *b*, diverso da 0, è **divisore** di un altro numero naturale *a* se la divisione fra quest'ultimo e il numero dato è esatta, cioè se la divisione dà come resto 0.

$$a : b = c$$

▶ Scrivi tutti i divisori dei seguenti numeri:
16; 25; 34; 66.

ESEMPIO

1. 6 è divisore di 18, perché $18 : 6 = 3$ con resto 0;
2. 7 non è divisore di 18, perché $18 : 7 = 2$ con resto 4.

Mentre i multipli di un numero sono infiniti, i suoi **divisori** sono un numero finito.

Per esempio i divisori di 40 sono: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Criteri di divisibilità

Un numero è divisibile per	Quando	Esempio di numero divisibile	Esempio di numero non divisibile
2	l'ultima cifra è pari	5 679 254	60 018 841
5	l'ultima cifra è 0 o 5	279 640; 310 065	9 111 008
4	il numero formato dalle ultime due cifre a destra lo è, oppure queste cifre sono 00	295 264; 310 500	917 426
25		157 275; 98 200	784 040
3	la somma delle cifre è divisibile per 3	74 391 $(7+4+3+9+1=24=3\cdot 8)$	32 723 $(3+2+7+2+3=17)$
9	la somma delle cifre è divisibile per 9	65 682 $(6+5+6+8+2=27=9\cdot 3)$	15 747 $(1+5+7+4+7=24)$
11	sommando le cifre di posto dispari e poi quelle di posto pari, la differenza fra il risultato maggiore e quello minore è 11 oppure un multiplo di 11	6 150 914 $(4+9+5+6)-(1+0+1)=24-2=22=11\cdot 2$	122 333 $(3+3+2)-(3+2+1)=8-6=2$

8 Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

▶ Esercizi a p. 42

La scomposizione in fattori primi

DEFINIZIONE

Si dicono **primi** i numeri naturali, diversi da 0 e da 1, che hanno come divisori soltanto 1 e se stessi.

ESEMPIO

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ..., 53, ..., 941, ..., 1987, ...

sono divisibili solo per se stessi e per 1, quindi sono numeri primi.

Quando un numero non è primo, è sempre possibile farne la **scomposizione in fattori primi**, ossia scriverlo sotto forma di un prodotto in cui *tutti* i fattori sono numeri primi.

PROBLEMA

Ma quanti sono i numeri primi?

Man mano che si procede nella successione dei numeri naturali, è sempre più raro incontrare numeri primi. Chi garantisce che, prima o poi, non troveremo il più grande numero primo? I Greci hanno dimostrato che i numeri primi sono infiniti: «Esistono sempre numeri primi in numero maggiore di quanti numeri primi si vogliano proporre».

(Euclide, *Elementi*, Libro IX, Proposizione 20, III secolo a.C.)

La dimostrazione si basa sull'osservazione che se consideriamo i numeri primi 2 e 3, troviamo un nuovo numero primo calcolando: $2\cdot 3+1=7$...

Scheda di lavoro

ESEMPIO

$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5.$ 20 è scomposto in fattori primi.

$60 = 3 \cdot 4 \cdot 5.$ 60 non è scomposto in fattori primi.

Infatti la scomposizione in fattori primi di 60 è:

$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$

Scriviamo anche:

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$

La scomposizione di un numero in fattori primi è unica. Viene anche chiamata **fattorizzazione** in numeri primi.

Il massimo comune divisore

Consideriamo i numeri 30 e 40.

I divisori di 30 sono: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

I divisori di 40 sono: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

30 e 40 hanno in comune i divisori 1, 2, 5, 10. 10 è il più grande e viene perciò chiamato *massimo comune divisore* e indicato con *MCD*.

Possiamo scrivere: MCD(30; 40) = 10.

Listen to it

If you have two or more natural numbers (different from zero), their **greatest common divisor** (GCD) is the largest natural number that divides them all.

DEFINIZIONE

Il **massimo comune divisore** (MCD) di due o più numeri naturali, *diversi da* 0, è il più grande fra i divisori comuni.

Il **MCD** di due o più numeri è il **prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo**.

ESEMPIO Scomponiamo 30 e 40, mettendo in colonna i fattori uguali.

$$\begin{array}{l} 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 = 2^3 \cdot \quad 5 \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{Il MCD è } 2 \cdot 5\text{, cioè } 10.$$

Le colonne «piene» individuano i fattori comuni 2 e 5; bisogna prendere ciascuno con l'esponente più piccolo.

Se il MCD di due numeri è 1, significa che essi non hanno divisori comuni, tranne il numero 1.

In questo caso i due numeri vengono detti **primi tra loro**. Per esempio 8 e 9 sono primi tra loro.

Il minimo comune multiplo

Consideriamo di nuovo i numeri 30 e 40 e i loro multipli *diversi da* 0.

I multipli di 30 sono: 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, ...

I multipli di 40 sono: 40, 80, 120, 160, 200, 240, ...

Il più piccolo multiplo che i numeri 30 e 40 hanno in comune è 120; esso viene perciò chiamato *minimo comune multiplo* e indicato con *mcm*.
Possiamo scrivere: mcm(30; 40) = 120.

DEFINIZIONE

Il **minimo comune multiplo** (mcm) di due o più numeri naturali, *diversi da* 0, è il più piccolo fra i multipli comuni, *diversi da* 0.

Il **mcm** di due o più numeri è il **prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più grande.**

Il mcm di due numeri primi fra loro è il loro prodotto.

Per esempio: mcm(8; 9) = 72.

ESEMPIO Riprendiamo le scomposizioni dell'esempio precedente:

$$\begin{aligned} 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 40 &= 2^3 \cdot \quad 5 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \text{Il mcm è } 2^3 \cdot 3 \cdot 5, \text{ cioè } 120.$$

Listen to it

If you have two or more natural numbers (different from zero) their **least common multiple** (lcm) is the smallest natural number that is multiple of all of them.

▶ Calcola mcm e MCD di 96, 72, 180.

Animazione

L'algoritmo di Euclide

Con un **algoritmo** descriviamo l'insieme delle istruzioni da eseguire per passare dai dati di un problema ai risultati.
Euclide, negli *Elementi*, descrive un algoritmo per il calcolo del MCD fra due numeri mediante sottrazioni successive.
Il metodo si basa sul seguente teorema.

TEOREMA

Divisibilità della differenza

Se due numeri naturali a e b, con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c, allora anche $a - b$ è divisibile per c.

DIMOSTRAZIONE

Se a è divisibile per c, allora $a : c = q_1 \quad \rightarrow \quad a = q_1 \cdot c$.

Se b è divisibile per c, allora $b : c = q_2 \quad \rightarrow \quad b = q_2 \cdot c$.

Consideriamo la differenza $a - b$ e raccogliamo c:

$$a - b = q_1 \cdot c - q_2 \cdot c \quad \rightarrow \quad a - b = (q_1 - q_2) \cdot c \quad \rightarrow \quad a - b \text{ è divisibile per } c.$$

ESEMPIO

130 e 40 sono divisibili per 5 → 130 − 40 = 90 è divisibile per 5.

Dati a e b, con $a > b$, per il teorema precedente, quando a e b hanno un divisore comune, anche $a - b$ ha lo stesso divisore, quindi, in particolare, possiamo scrivere:

$$\mathbf{MCD}(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \mathbf{MCD}(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}; \boldsymbol{b}), \quad \text{con } a > b.$$

Esaminiamo ora l'algoritmo, dove utilizziamo anche il fatto che il MCD fra un numero e se stesso è ancora il numero stesso:

$$\text{MCD}(a; a) = a.$$

MATEMATICA INTORNO A NOI

Cicale e numeri primi In alcune zone degli Stati Uniti vivono due specie di cicale, *Magicicada septendecim* e *Magicicada tredecim*, con cicli vitali rispettivamente di 17 e 13 anni.

▶ Perché le cicale preferiscono i numeri primi?

La risposta

MCD con sottrazioni successive
Consideriamo a e b, con $a > b$;
calcoliamo $a - b$;
se $a - b = b$, allora $a - b$ è il MCD(a; b) e ci fermiamo;
altrimenti sostituiamo il maggiore fra i numeri $a - b$ e b al posto di a e il minore al posto di b, e ripetiamo il procedimento precedente, calcolando la differenza.

ESEMPIO Calcoliamo MCD(58; 18).

$58 - 18 = 40$; — 40 è maggiore di 18, quindi sostituiamo 40 a 58

$40 - 18 = 22$; — 22 è maggiore di 18, quindi sostituiamo 22 a 40

$22 - 18 = 4$; — 4 è minore di 18, quindi sostituiamo 4 a 18 e 18 a 22

$18 - 4 = 14$; $14 - 4 = 10$; $10 - 4 = 6$; $6 - 4 = 2$; $4 - 2 = 2$.

sono uguali: ci fermiamo

2 è il MCD.

Ecco come abbiamo applicato le proprietà precedenti:

$$\text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(\underbrace{40}_{58-18}; 18) = \text{MCD}(\underbrace{22}_{40-18}; 18) = \text{MCD}(18; \underbrace{4}_{22-18}) =$$

$$\text{MCD}(\underbrace{14}_{18-4}; 4) = \text{MCD}(\underbrace{10}_{14-4}; 4) = \text{MCD}(\underbrace{6}_{10-4}; 4) = \text{MCD}(4; \underbrace{2}_{6-4}) = \text{MCD}(2; \underbrace{2}_{4-2}) = 2.$$

Otteniamo il MCD = 2 quando i due numeri sono uguali.

Nell'esempio precedente, da 58 abbiamo tolto 18 per 3 volte fino a giungere a 4:

$$[(58 \underbrace{- 18) - 18] - 18}_{\text{3 sottrazioni}} = 4 \quad \rightarrow \quad 58 : 18 = 3 \quad \text{resto } 4.$$

Queste 3 sottrazioni ripetute equivalgono a dividere 58 per 18, ottenendo 4 come resto. Quindi, utilizzando il teorema della divisibilità della differenza, ma evitando sottrazioni ripetute, diciamo che se 58 e 18 sono divisibili per uno stesso numero, anche 4, resto di $58 : 18$, è divisibile per lo stesso numero.

L'esempio giustifica il seguente teorema.

TEOREMA
Divisibilità del resto
Se due numeri naturali a e b, con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c, allora anche r, resto della divisione $a : b$, è divisibile per c.

ESEMPIO

130 e 40 sono divisibili per 5.

$130 : 40 = 3$ con resto 10 $\rightarrow$ 10 è divisibile per 5.

Nell'algoritmo di Euclide, per diminuire il numero di operazioni da eseguire, possiamo allora procedere mediante **divisioni successive**, invece che sottrazioni, e utilizzare i resti ottenuti.

ESEMPIO Calcoliamo MCD(58; 18) con divisioni ripetute.

$58 : 18 = 3$ con resto 4 $\rightarrow$ $\text{MCD}(58; 18) = \text{MCD}(18; 4)$;

$18 : 4 = 4$ con resto 2 $\rightarrow$ $\text{MCD}(18; 4) = \text{MCD}(4; 2)$;

$4 : 2 = 2$ con resto 0 $\rightarrow$ $\text{MCD}(4; 2) = 2$.

Abbiamo ottenuto di nuovo $\text{MCD}(58; 18) = 2$.

Nell'esempio ci siamo fermati quando abbiamo ottenuto resto 0, perché in questo caso il secondo numero è divisore del primo e quindi è anche il MCD. In generale:

$\text{MCD}(a; b) = b$, se $r = 0$.

▶ Calcola il MCD fra 330 e 90, utilizzando l'algoritmo di Euclide.

Animazione

Una proprietà fra mcm e MCD di due numeri

Il minimo comune multiplo e il massimo comune divisore di due numeri sono legati anche dalla seguente proprietà:

$$\mathbf{mcm}(a; b) = \frac{a \cdot b}{\mathbf{MCD}(a; b)}.$$

Consideriamo $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Il MCD, scomposto in fattori, è $3 \cdot 7$, e il mcm è $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Esprimiamo il prodotto dei due numeri, lasciandoli scomposti in fattori:

$$84 \cdot 105 = (2^2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7).$$

Vediamo che $3 \cdot 7$, cioè il MCD, è ripetuto due volte, mentre nel mcm dobbiamo considerarlo una volta sola. Quindi:

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = \frac{(2^2 \cdot 3 \cdot 7) \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7)}{3 \cdot 7} \rightarrow \text{mcm}(84; 105) = \frac{84 \cdot 105}{\text{MCD}(84; 105)}.$$

La proprietà permette di calcolare il mcm se si è calcolato il MCD, per esempio con l'algoritmo di Euclide.

ESEMPIO Con l'algoritmo di Euclide abbiamo calcolato che $\text{MCD}(58; 18) = 2$, quindi:

$$\text{mcm}(58; 18) = \frac{58 \cdot 18}{2} = 522.$$

9 I sistemi di numerazione

▶ Esercizi a p. 46

Il sistema a base dieci

Il nostro modo di scrivere i numeri si basa sull'uso di dieci simboli diversi, le **cifre**:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

I primi dieci numeri naturali sono indicati da una sola cifra, mentre per scrivere i successivi utilizziamo una combinazione di cifre.

Consideriamo il numero 222. Leggendolo da destra, il primo 2 indica le unità, il secondo 2 le decine, il terzo 2 le centinaia. Le cifre assumono un valore diverso a seconda della *posizione* in cui si trovano. Per questo il nostro sistema è di tipo **posizionale**.

Ogni numero può essere scritto in **forma polinomiale**, come somma di prodotti costituiti da un numero di una cifra e una potenza di 10.

▶ Scrivi i numeri la cui forma polinomiale è la seguente:
- $9 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10$;
- $3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$.

ESEMPIO

$$4637 = 4000 + 600 + 30 + 7 = 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0.$$

Il numero 10 assume un ruolo particolare e viene detto **base**. Il nostro sistema di numerazione è chiamato **a base dieci**.

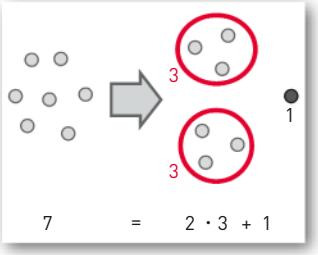
I sistemi con altre basi

Un sistema di tipo posizionale può avere come base un numero qualsiasi. È sufficiente raggruppare le unità non secondo le potenze di dieci, ma secondo quelle della nuova base.

ESEMPIO Scriviamo 7 in base tre. Il numero 7 si può pensare come costituito di 2 gruppi da 3 unità e di 1 da 1 unità. Perciò il numero 7 (in base dieci) scritto in base tre diventa 21 (si legge: «due-uno»).

In forma polinomiale:

$$7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0.$$



Con il simbolo 21 in base tre indichiamo un numero diverso da quello che lo stesso simbolo indica in base dieci (ossia ventuno). Per non creare confusione, conveniamo di scrivere i numeri in base diversa da dieci fra parentesi, indicando in piccolo la base. Nell'esempio precedente scriviamo quindi:

$$7 = (21)_3.$$

Scriviamo una tabella dei primi cinque numeri diversi da 0 scritti nelle basi da 2 a 5.

Numero	Base 2	Base 3	Base 4	Base 5
1	1	1	1	1
2	10	2	2	2
3	11	10	3	3
4	100	11	10	4
5	101	12	11	10

Lo stesso simbolo 10 (uno-zero) indica il 2 in base due, il 3 in base tre e così via. Il simbolo 100 (uno-zero-zero) indica la potenza con esponente 2 della base e così via.
Inoltre, scelta una base, essa ci indica anche quanti simboli (cifre) sono necessari per rappresentare tutti i numeri; per esempio, in base due sono necessari solo due simboli, 0 e 1, in base tre sono necessari i simboli 0, 1 e 2 e così via.
Il sistema di numerazione in base due si chiama anche **sistema binario**.

Se la base è maggiore di 10, servono altri simboli oltre alle dieci cifre che conosciamo. Di solito si usano le lettere maiuscole. Per esempio, in base dodici il numero 10 viene indicato con A e il numero 11 con B.
In base sedici (molto usata in informatica) i numeri da 10 a 15 sono indicati con le lettere da A a F.

Da una base qualsiasi a base dieci e viceversa

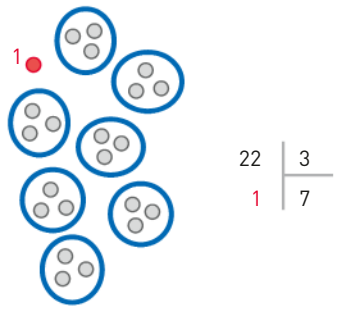
Nella scrittura di un numero possiamo passare da una base prescelta a base dieci utilizzando la forma polinomiale.

ESEMPIO

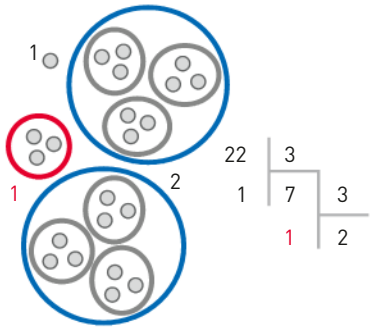
1. $(1011)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 8 + 2 + 1 = 11$;
2. $(232)_5 = 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 50 + 15 + 2 = 67$;
3. $(1A)_{12} = 1 \cdot 12^1 + 10 \cdot 12^0 = 22$.

Per passare invece da base dieci a una base qualsiasi possiamo utilizzare un procedimento di divisioni successive che hanno come divisore la base.

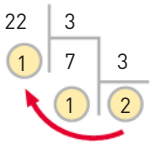
Per esempio, scriviamo 22 in base tre.



a. Dividendo 22 per 3 otteniamo quoziente 7 e resto 1: in 22 ci sono 7 gruppi da 3 e 1 unità.



b. Dividendo 7 per 3 otteniamo quoziente 2 e resto 1: dai 7 gruppi da 3 si ottengono 2 gruppi da 3^2 e 1 gruppo da 3 isolato.



c. Il numero in base tre si legge nella direzione della freccia: $(22)_{10} = (211)_3$.

► Scrivi:
a. $(10\,210)_3$ in base dieci;
b. 3615 in base 4.

Animazione

► Scrivi il numero 179 in base 5 e in base 2. Confronta la tua risoluzione con quella proposta nel video.

Video

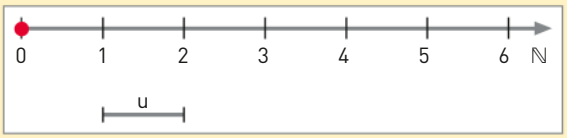
► Scrivi in base dieci i seguenti numeri.
$(11\,000)_2$; $(200)_3$; $(211)_4$; $(312)_5$; $(10A)_{12}$; $(1002)_5$.

► Scrivi i seguenti numeri espressi in base dieci nella base indicata a fianco.
143 in base 2; 218 in base 5;
3612 in base 3; 1322 in base 4.

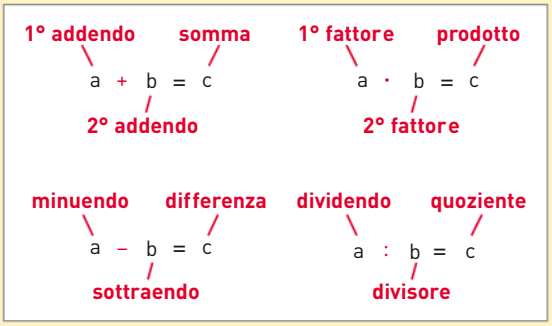
IN SINTESI
I numeri naturali

Che cosa sono i numeri naturali

L'insieme dei numeri naturali 0, 1, 2, 3, … viene indicato con la lettera $\mathbb{N}$.
I numeri naturali possono essere rappresentati su una **semiretta orientata**.
Dati due numeri naturali, diversi tra loro, è sempre possibile stabilire se il primo è maggiore del secondo o viceversa.



Le quattro operazioni



Il divisore deve essere diverso da 0.
Delle quattro operazioni, solo l'addizione e la moltiplicazione sono **operazioni interne** in $\mathbb{N}$.

Le potenze

Una **potenza** con esponente maggiore di 1 è una moltiplicazione della base per se stessa tante volte quante sono indicate dall'esponente:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

- Qualunque numero **elevato a 1** dà come risultato se stesso: $a^1 = a$.
- Qualunque numero diverso da 0 **elevato a 0** dà come risultato 1: $a^0 = 1$.
- L'espressione 0^0 **non ha significato**.

Le espressioni con i numeri naturali

In un'**espressione**, le operazioni devono essere svolte in questo ordine:
1. elevamento a potenza;
2. moltiplicazione e divisione, nell'ordine in cui sono scritte;
3. addizione e sottrazione, nell'ordine in cui sono scritte.

Inoltre, le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza, prima le parentesi tonde, poi le quadre, poi le graffe.

Le proprietà delle operazioni

Proprietà dell'addizione

Proprietà	Espressione
commutativa	$a + b = b + a$
associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Proprietà della moltiplicazione

Proprietà	Espressione
commutativa	$a \cdot b = b \cdot a$
associativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
distributiva a sinistra rispetto all'addizione	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
distributiva a destra rispetto all'addizione	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Proprietà della sottrazione

Proprietà	Espressione
invariantiva	$a - b = (a + n) - (b + n)$ con $a \geq b$ $a - b = (a - n) - (b - n)$ con $a \geq b \geq n$

Proprietà della divisione	
Proprietà	**Espressione**
invariantiva	$a : b = (a \cdot n) : (b \cdot n)$ con $b \neq 0$, $n \neq 0$, a multiplo di b $a : b = (a : n) : (b : n)$ con $b \neq 0$, $n \neq 0$, a multiplo di b, a e b multipli di n
distributiva a destra rispetto all'addizione	$(a + b) : c = a : c + b : c$ con $c \neq 0$, $a + b$, a e b multipli di c

Le proprietà delle potenze

Proprietà delle potenze	
Proprietà	**Espressione**
1ª: prodotto di potenze di uguale base	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2ª: quoziente di potenze di uguale base	$a^m : a^n = a^{m-n}$ con $m \geq n$, $a \neq 0$
3ª: potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4ª: prodotto di potenze di uguale esponente	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5ª: quoziente di potenze di uguale esponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$ con $b \neq 0$, a multiplo di b

Le lettere della tabella indicano numeri naturali qualsiasi. La base e l'esponente di una stessa potenza non possono essere contemporaneamente nulli.

I multipli e i divisori di un numero

- Un numero naturale a è **multiplo** di un numero naturale b se esiste un numero c che moltiplicato per b dà a.
- Un numero naturale b (diverso da 0) è **divisore** di un altro numero naturale a se la divisione fra b e a dà come resto 0.

Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

- Un numero naturale (maggiore di 1) è **primo** quando è divisibile soltanto per 1 e per se stesso.
- Ogni numero naturale non primo si può scomporre nel prodotto di **fattori primi**.
- Il **MCD** di due o più numeri, diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei soli fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con l'esponente più piccolo.

ESEMPIO

$\text{MCD}(18; 48) = \text{MCD}(2 \cdot 3^2; 2^4 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6.$

- Il **mcm** di due o più numeri naturali diversi da 0 è il più piccolo dei multipli comuni ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non comuni, presi ciascuno una sola volta con l'esponente più grande.

ESEMPIO

$\text{mcm}(12; 20) = \text{mcm}(2^2 \cdot 3; 2^2 \cdot 5) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$

- L'**algoritmo di Euclide** è un metodo per calcolare il MCD fra due numeri mediante sottrazioni successive che si basa sul teorema che afferma: se due numeri naturali a e b, con $a > b$, sono divisibili per uno stesso numero c, allora anche $a - b$ è divisibile per c.

I sistemi di numerazione

Il nostro sistema di numerazione è **posizionale a base dieci**: ogni numero viene rappresentato mediante dieci cifre (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) che assumono valore diverso a seconda della posizione che occupano.
Un sistema posizionale può avere come base un numero qualsiasi.

ESEMPIO

$(1001)_2 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 9;$

$(221)_3 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 25;$

$(53)_7 = 5 \cdot 7 + 3 = 38.$

CAPITOLO 1
ESERCIZI

1 Che cosa sono i numeri naturali

▶ Teoria a p. 2

1 VERO O FALSO?

a. 6 è precedente a 7. V F
b. 7 è il precedente di 8. V F
c. 8 è il successivo di 6. V F
d. 7 è successivo a 8. V F
e. 0 non ha il successivo. V F

2 Di uno dei numeri naturali 1, 4, 0 non esiste il precedente. Quale? Hanno tutti il successivo?

3 VERO O FALSO?

a. $8 < 8$ V F
b. $0 < 7$ V F
c. $7 < 5$ V F
d. $1 \neq 2$ V F
e. $9 = 8$ V F
f. $0 \geq 0$ V F

4 YOU & MATHS **Numbers in words** Write the following numbers in words if they are in digits, and write them in digits if they are given in words.

a. Four hundred and two.
b. One thousand two hundred three.
c. Fifteen hundred twenty four.
d. 2005.
e. 43 010.
f. 10 002.

5 COMPLETA inserendo fra le seguenti coppie di numeri il simbolo di minore (<) o di maggiore (>):

4 ____ 7; 8 ____ 10; 0 ____ 12; 15 ____ 13;
15 ____ 0; 14 ____ 7; 1 ____ 2; 3 ____ 2.

6 Scrivi quanti numeri naturali sono compresi fra i numeri delle coppie precedenti.

7 COMPLETA le seguenti frasi.

Il successivo di 7 è ____.
Il precedente di 10 è ____.
Il successivo di ____ è 2001.
Il precedente di ____ è 500 000.

8 Traduci le seguenti frasi usando i simboli $<, \leq, >, \geq, =, \neq$.

a. 7 è minore di 9; *a* è uguale a 21.
b. *x* è maggiore o uguale a 2; 10 è diverso da 3.
c. *b* è maggiore di 9; *x* è minore o uguale a 4.
d. 9 è maggiore di 7 e minore di 11; *a* è diverso da *b*.

9 Scrivi tutti i numeri naturali *n*, se esistono, che verificano le relazioni indicate.

$n \leq 4$; $n < 2$; $1 < n \leq 5$; $6 < n < 7$; $4 \leq n < 8$; $1 \leq n < 6$.

10 Scrivi in ordine crescente i seguenti numeri:
6; 10; 2; 114; 38; 100.

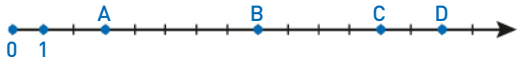
11 Scrivi in ordine decrescente i seguenti numeri:
28; 0; 129; 14; 99; 237.

IN FORMA GRAFICA Rappresenta sulla semiretta orientata i seguenti numeri, scegliendo un'opportuna unità di misura.

12 1; 5; 12; 16; 7; 8.

13 0; 1000; 2500; 3000; 500; 250.

14 Per ogni punto indicato scrivi il numero corrispondente.



15 **SPIEGA PERCHÉ** si dice che $\mathbb{N}$ è un insieme discreto.

2 Le quattro operazioni

▶ Teoria a p. 3

Gli operatori, gli operandi, il risultato

16 Per ognuna delle operazioni seguenti, indica il nome di ogni operando e del risultato.

$5 + 10 = 15$; $7 - 5 = 2$; $5 \cdot 4 = 20$; $10 : 2 = 5$.

17 **COMPLETA** scrivendo il numero mancante e indica quale operazione hai eseguito per ottenere quel numero:

$5 + \square = 18$; $\square \cdot 7 = 21$; $329 + \square = 742$; $32 \cdot \square = 2368$.

18 Nelle uguaglianze seguenti i simboli ♦, ★, ▲, ▼ rappresentano un'operazione. Quale?

$9 ♦ 3 = 27$; $20 ▲ 5 = 15$; $15 ★ 5 = 3$; $10 ▼ 14 = 24$.

L'addizione e la moltiplicazione

VERO O FALSO?

19 Dati tre numeri naturali qualsiasi a, b, c:

a. $a + c = c + a$. V F

b. $b - a = a - b$. V F

c. $(a + b) - c = a + (b - c)$. V F

d. $a - 0 = 0 - a$. V F

SPIEGA PERCHÉ

20 Perché lo 0 è detto elemento assorbente della moltiplicazione?

21 Se il prodotto di due numeri naturali è 0, sono nulli entrambi i fattori? Perché?

22 La somma di due numeri naturali *consecutivi* (cioè due numeri di cui uno è successivo dell'altro) è 27. Trova i due numeri.

23 La somma di un numero e del suo precedente è 683. Trova i due numeri.

24 L'insieme $\{0, 1, 2, 3\}$ è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione?

25 L'insieme $\{0, 1\}$ è chiuso rispetto all'addizione? E rispetto alla moltiplicazione?

26 L'addizione è interna nell'insieme dei numeri pari? E la moltiplicazione?

27 L'addizione è interna nell'insieme dei numeri dispari? E la moltiplicazione?

ESERCIZI

La sottrazione e la divisione

28 **SPIEGA PERCHÉ** le operazioni di sottrazione e di divisione non sono operazioni interne a $\mathbb{N}$.

29 Indica quali delle seguenti operazioni sono possibili in $\mathbb{N}$.

$3+5$; $7-3$; $4-18$; $5:5$; $12:9$; $3:6$; $4\cdot 9$; $0:1$.

30 Elimina con una crocetta le operazioni non possibili in $\mathbb{N}$.

$3-4$; $4-4$; $5-4$; $4:3$; $4:4$; $4:8$; $8:4$; $8:8$.

31 **COMPLETA** Scrivi alcuni dei numeri che rendono possibili in $\mathbb{N}$ le seguenti operazioni.

$\square-4$; $\square-1$; $4:\square$; $13:\square$; $\square-10$; $3:\square$; $10:\square$; $\square:2$.

Il numero 0 e il numero 1

32 **COMPLETA** le seguenti uguaglianze, quando è possibile.

$2:\square=1$ $\quad\square\cdot 0=0$ $\quad 3:0=\square$ $\quad 3\cdot\square=0$

$\square:4=4$ $\quad\square+0=0$ $\quad 2-\square=2$ $\quad\square:3=0$

33 **SPIEGA PERCHÉ** non sono possibili le seguenti divisioni.

$4:0$; $10:0$; $500:0$; $0:0$.

34 **COMPLETA** scrivendo i risultati delle seguenti operazioni, quando esistono.

$3:1=\square$ $\quad 0:3=\square$ $\quad 3\cdot 0=\square$ $\quad 3:3=\square$

$3:0=\square$ $\quad 3\cdot 1=\square$ $\quad 0:5=\square$ $\quad 0\cdot 0=\square$

35 **VERO O FALSO?**

a. La differenza fra due numeri consecutivi è 1. V F

b. In $\mathbb{N}$ non è possibile la sottrazione con il sottraendo uguale a 0. V F

c. Se si considera l'insieme dei naturali escluso lo 0, la divisione è operazione interna in tale insieme. V F

d. Dati due numeri (il primo maggiore del secondo), se si addiziona al secondo numero la differenza fra il primo e il secondo, si ottiene il primo. V F

3 Le potenze

▶ Teoria a p. 6

36 **VERO O FALSO?**

a. Nell'espressione 5^3, 5 è l'esponente e 3 la base. V F

b. L'espressione 0^0 è indeterminata. V F

c. Le potenze 5^0 e 1^{15} hanno lo stesso risultato. V F

d. La potenza 2^4 è multipla della potenza 2^5. V F

37 Qual è il risultato della potenza 0^n, con $n\in\mathbb{N}$?

38 Quale numero ha come potenza solo se stesso?

39 Quale numero non ha fra le sue potenze 1?

40 Scrivi le potenze di 5 comprese fra 0 e 11.

41 Indica fra i seguenti numeri quelli che sono potenze di 3.

3; 6; 9; 0; 1; 12; 27; 30; 33; 81; 121; 99.

Calcola il valore delle seguenti potenze.

42 2^3; 3^4; 5^2; 7^1; 8^0; 7^2; 100^0; 1^0; 0^1.

43 9^3; 4^2; 2^5; 0^4; 3^5; 1^8; 10^7; 2^6; 3^6; 5^3.

44 YOU & MATHS If $2^4 \cdot 3^8 = n \cdot 6^4$, then $n =$

A 12 B 24 C 27 D 54 E 81

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2003)

45 YOU & MATHS Which of the following numbers is equal to the sum

$8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8 + 8^8$?

A 8^8 B 8^9 C 64^8 D 8^{64} E 64^{64}

(USA *University of South Carolina: High School Math Contest*, 2002)

46 YOU & MATHS Which of the following numbers is a perfect square?

A $4^4 5^5 6^6$

B $4^4 5^6 6^5$

C $4^5 5^4 6^6$

D $4^6 5^4 6^5$

E $4^6 5^5 6^4$

(USA, *AMC 12*, 2002)

Le gare *American Mathematics Contest 12* (*AMC 12*) sono rivolte a ragazzi americani del secondo biennio superiore.

COMPLETA quando è possibile, mettendo il numero giusto.

47 $\square^2 = 0$; $\square^3 = 27$; $\square^0 = 2$; $\square^1 = 8$.

48 $0^{\square} = 1$; $5^{\square} = 10$; $7^{\square} = 1$; $4^{\square} = 16$.

49 $3^{\square} = 6$; $2^{\square} = 8$; $1^{\square} = 2$; $5^{\square} = 0$.

50 $0^6 = \square$; $16^0 = \square$; $3^{\square} = 243$; $\square^2 = 1$.

51 VERO O FALSO?

a. $1^n = 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$. V F

b. $0^n = 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$. V F

c. $n^0 = 1$, con $n = 1, 2, 3, \ldots$ V F

d. $n^1 = n, \forall\, n \in \mathbb{N}$. V F

e. $0^0 = 0$. V F

4 Le espressioni con i numeri naturali

▶ Teoria a p. 6

52 Tra le espressioni: $(12 - 4) \cdot 3$, $12 - 4 \cdot 3$, $12 + 3 \cdot 4$, due hanno lo stesso risultato. Quali?

53 Considera le seguenti coppie di espressioni:

a. $(5 + 7) + 8$, $5 + 7 + 8$; b. $7 + (2 \cdot 3)$, $7 + 2 \cdot 3$; c. $20 : (5 - \quad)$, $20 : 5 - 4$.

Solo in una coppia l'eliminazione della parentesi influisce sul risultato. Quale?

Indica in quali casi lo spostamento o l'eliminazione delle parentesi non influisce sul risultato dell'espressione.

54 $(5 + 2) + 8$; $5 + 2 + 8$.

55 $7 + (5 \cdot 3)$; $7 + 5 \cdot 3$.

56 $(3 + 2) \cdot 11$; $3 + 2 \cdot 11$.

57 $5 + (3 + 9)$; $5 + 3 + 9$.

58 $40 : (5 - 4)$; $40 : 5 - 4$.

59 $24 + 6 : 3$; $(24 + 6) : 3$.

ESERCIZI

60 INVALSI 2006 Sono dati due numeri di due cifre $a2$ e $4b$ in cui a rappresenta la cifra delle decine del primo numero e b la cifra delle unità del secondo. Sapendo che $23 + 4b = a2$, quanto vale la somma di a e b?

A 15
B 16
C 17
D 18

61 YOU & MATHS **Working backwards**

a. Write at least 3 expressions that, calculated, give 16.

b. Now write 3 more expressions that give 16, making sure to use the structure $a \cdot (b \pm c) = 16$.

Dalle parole alle espressioni

62 ESERCIZIO GUIDA Scriviamo le espressioni relative alle seguenti frasi:

a. «Sottrarre da 12 il quoziente fra 4 e 2»; **b.** «Dividere per 2 la differenza fra 12 e 4»

Traduciamo nell'ordine le parole in espressioni:

a. «Sottrarre da 12 …» si traduce con: $12 - \ldots$

«… il quoziente tra 4 e 2» si traduce con: $4 : 2$.

Pertanto l'espressione equivalente è: $12 - 4 : 2$.

b. «Dividere per 2…» si traduce con: $\ldots : 2$.

«… la differenza tra 12 e 4» si traduce con: $12 - 4$.

Scrivendo l'espressione $12 - 4 : 2$, poiché la divisione si esegue prima della sottrazione, verrebbe diviso per 2 solamente il 4.

La frase invece dice di dividere per 2 la **differenza** …, quindi bisogna scrivere $12 - 4$ tra **parentesi**. L'espressione richiesta è $(12 - 4) : 2$.

63 INVALSI 2011 Qual è l'espressione numerica che corrisponde alla frase: «Al 3 aggiungi il prodotto di 5 e 9, poi dividi per 6 e quindi sottrai 2»?

A $[3 + (4 + 9)] : (6 + 2)$
B $3 + 5 \cdot 9 : 6 - 2$
C $3 \cdot (5 + 9) : 6 - 2$
D $(3 + 5 \cdot 9) : 6 - 2$

Scrivi le espressioni relative alle seguenti frasi e calcolane il risultato.

64 Sottrarre 9 dal prodotto di 8 per 2.

65 Dividere 15 per la differenza tra 9 e 4 e poi sommare 2.

66 Moltiplicare per 3 la differenza tra 12 e 7.

67 Moltiplicare 3 per la somma di 9 e del quoziente di 14 e 2.

68 Sottrarre 3 al risultato della divisione di 12 per la differenza tra 5 e 1.

69 Dividere 18 per la differenza tra 9 e il prodotto di 3 per 2.

70 Sottrarre a 17 la differenza tra il prodotto di 8 per 2 e 9.

71 Dividere per 5 la differenza tra 15 e il prodotto di 5 per 2.

72 Moltiplicare per 7 la differenza tra 10 e 8; sottrarre al risultato 14.

73 Sommare 2 al prodotto di 3 per la differenza tra il quoziente di 16 e 4 e 3.

74 Sommare 7 al prodotto di 12 per la somma di 4 e la differenza tra 5 e il prodotto di 3 per 1.

Dalle espressioni alle parole

75 **ESERCIZIO GUIDA** Traduciamo in parole le espressioni: **a.** $12 + 3 \cdot 5$; **b.** $(12 + 3) \cdot 5$.

Sostituiamo mano a mano le parole alle espressioni, facendo attenzione alla presenza delle parentesi.

a. Dato che non ci sono parentesi, la moltiplicazione si esegue prima dell'addizione:

… $3 \cdot 5$ si traduce in: «… il prodotto di 3 per 5»;

$12 +$ … si traduce in: «Aggiungere a 12 …».

La frase corrispondente alla nostra espressione è:

«Aggiungere a 12 il prodotto di 3 per 5».

b. La **parentesi** ci dice che, al momento dello svolgimento, bisogna eseguire prima l'addizione e poi la moltiplicazione:

$12 + 3$ si traduce in: «La somma tra 12 e 3»;

… $\cdot 5$ si traduce in: «Moltiplicare … per 5».

La frase corrispondente alla nostra espressione è:

«Moltiplicare la somma tra 12 e 3 per 5».

Traduci in parole le seguenti espressioni.

76 $12 - 6 : 3$; $15 + 7 \cdot 3$.

77 $(12 + 6 : 3) : 7$; $(15 - 10) \cdot 3 + 2$.

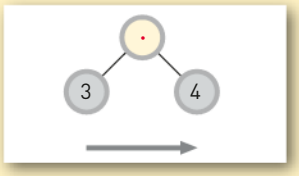
78 $(15 : 5 - 2) - 1$; $[4 : (15 : 3 - 3)] + 2$.

79 $8 \cdot (12 : 6 - 2) + 1$; $6 - [15 : (2 + 3)]$.

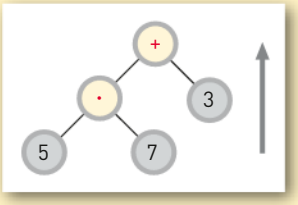
Espressioni e diagrammi ad albero

80 **ESERCIZIO GUIDA** Nei seguenti esempi utilizziamo diagrammi ad albero per rappresentare delle espressioni e per comprendere l'ordine di esecuzione delle operazioni.

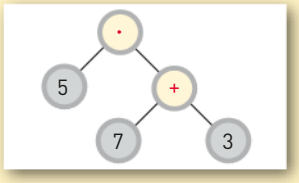
a. $3 \cdot 4$
Un'operazione si rappresenta come nella figura. L'ordine con cui sono scritti i termini va da sinistra a destra.



b. $5 \cdot 7 + 3$
La prima operazione da eseguire è in basso, l'ultima in alto.



c. $5 \cdot (7 + 3)$
L'introduzione della parentesi cambia l'ordine delle operazioni, «legando» diversamente i numeri dell'espressione.



Rappresenta con diagrammi ad albero le seguenti espressioni.

81 $4 + 6 \cdot 9$; $(4 + 6) \cdot 9$.

82 $7 - 3 + 2$; $7 - (3 + 2)$.

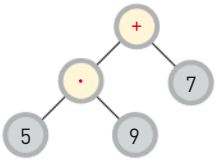
83 $10 - 4 \cdot 2 + 3$; $10 - 4 \cdot (2 + 3)$.

84 $15 + 20 : 4 - 2$; $15 + 20 : (4 - 2)$.

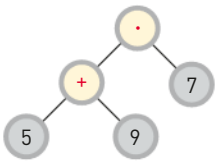
ESERCIZI

Scrivi le espressioni relative ai seguenti diagrammi ad albero.

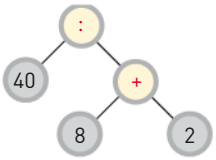
85



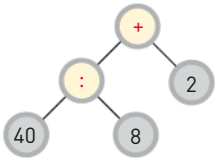
86



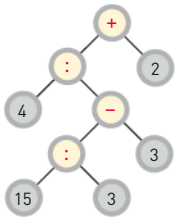
87



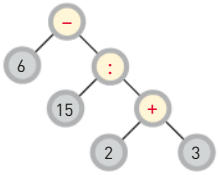
88



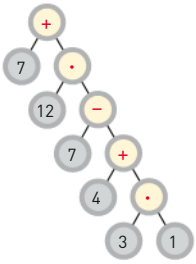
89



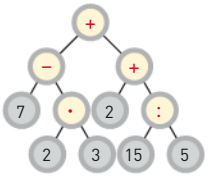
90



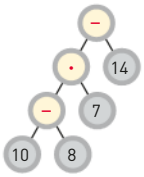
91



92



93



Dai problemi alle espressioni

Problemi INTORNO A NOI

94 ESERCIZIO GUIDA Scriviamo l'espressione che permette di risolvere il problema: «Sandro ha 2 banconote da € 5 e 4 monete da € 2. Si ferma a pranzare e compra 2 tranci di pizza da € 2 ciascuno e una bottiglietta d'acqua da € 1. Nel pagare si accorge di avere in tasca anche altre tre monete da € 1. Quanto denaro resta a Sandro?».

spende — trova

$$\underbrace{2 \cdot 5}_{\text{2 banconote da € 5}} + \underbrace{4 \cdot 2}_{\text{4 monete da € 2}} - \underbrace{2 \cdot 2}_{\text{2 tranci da € 2}} - \underbrace{1}_{\text{bottiglietta da € 1}} + \underbrace{3 \cdot 1}_{\text{3 monete da € 1}}$$

Semplifichiamo l'espressione: $2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 1 = 10 + 8 - 4 - 1 + 3 = 16$.
A Sandro restano 16 euro.

Risolvi i seguenti problemi scrivendo un'espressione e semplificandola.

95 Una pasticceria vende dei deliziosi baci di dama in confezioni da tre. Quanti baci di dama ha venduto se a inizio giornata aveva 243 baci di dama e a fine giornata le restano 64 confezioni? [51]

96 Una nonna ha 5 nipoti e 25 torroncini. Dà 3 torroncini al primo nipote e uno in più a ciascuno degli altri nipoti. Quanti torroncini le rimangono? [6]

97 **Luca si organizza…** Luca è in vacanza. Sa che tra un'ora deve uscire con gli amici, quindi pensa: «Ho un sacco di tempo! Posso giocare ai videogiochi per 40 minuti, suonare il basso per un po', consultare un social network per 5 minuti. Poi farò la doccia in 3 minuti e uscirò». Quanto tempo ha Luca per suonare?

98 Giorgio parte per un'escursione, con la sua borraccia da un litro, insieme all'amico Marco. A inizio escursione la borraccia contiene 80 cL d'acqua, Giorgio ne beve metà, poi ne aggiunge 60 cL a una fontana. In seguito beve 20 cL e cede metà dell'acqua rimasta a Marco.
Quanta acqua rimane nella borraccia di Giorgio? [40 cL]

99 Una cuoca possiede 4 sacchetti di farina del peso di 1 kg ciascuno. Deve fare 7 dolci: nei primi 3 occorrono 350 g di farina per ciascuno e negli altri 600 g di farina per ciascuno. Alla fine quanta farina rimane alla cuoca? [550 g]

Le espressioni con le parentesi

100 **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo: $[(9+1-6)\cdot(3\cdot4-2)]:\{10\cdot2-[4\cdot(5+1-3)]\}$.

Svolgiamo i calcoli all'interno delle parentesi tonde:

$$[(4)\cdot(10)]:\{10\cdot2-[4\cdot(3)]\}=$$

Eliminiamo le parentesi tonde ed eseguiamo i calcoli all'interno delle parentesi quadre:

$$[40]:\{10\cdot2-[12]\}=$$

Eliminiamo le parentesi quadre e svolgiamo i calcoli all'interno delle parentesi graffe:

$$40:\{20-12\}=40:8=$$

Scriviamo il risultato:

$$5.$$

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

101 $[12-(3+2)]\cdot2-[6+(3+1)\cdot2-5+1]$ [4]

102 $\{[10\cdot(3+2)]:[16+3\cdot3]\}+3\cdot(2+1)$ [11]

103 $[20:(3\cdot2-2)+4]:(6-3\cdot2+3)$ [3]

104 $\{[12+2\cdot(3+1)]:(3+2)\}-(3+1)$ [0]

105 $\{12\cdot[(5+2)\cdot3-19]\}:[(3+1)\cdot(2+1)]$ [2]

106 $\{15-[13+(2+14):(2+2\cdot3)-3]\}:[(2+7):3]$ [1]

107 $\{(2+7-3\cdot2)\cdot[4-(1+2)]\}:[7-(3\cdot2+0)]$ [3]

108 $\{[(10-7+3+2-5)\cdot(25:5)-2]\cdot[(30-5+1-16):(30:15)+10+7-20]\}:2$ [13]

109 $13-\{8\cdot15-[(7\cdot5+5):8+20:(28:4-3)]\}:11$ [3]

110 $(22-5\cdot4):2+\{[36:2+7\cdot3-1-(2\cdot8+6)]-2^3\}$ [9]

111 **ESEMPIO DIGITALE** $[(5-2):3+2]\cdot[4-(3^2-9)]+[36:(1+11)-1]$

112 $(2^0\cdot3^0+8):3+[3^2-(2^1+4):2]+(2^4+2):3^2$ [11]

113 $[(4+3^2-1):2^2+45:3^2]:2^2+(21\cdot3):9+1^0$ [10]

ESERCIZI

114 $\{[7\cdot(2+1)-2\cdot 3]:(1+2)\}-[(3\cdot 2+5)-10]$ [4]

115 $[(2-1)\cdot 7+5]:[3-(1-1)]+[15-3\cdot(1+2)]$ [10]

116 $\{[2\cdot(3+7)-15]\cdot[3+4\cdot(1+2)-14]+2\}:7$ [1]

117 $[(10+3-9)\cdot(3\cdot 2-4)]:[(14+24-30-6)\cdot(40-10+2-30)]$ [2]

118 $(16\cdot 2-18):[48:(69:3+1)]\cdot\{6\cdot 3-[40-(9\cdot 8-2):2]-10\}$ [21]

119 $63-[48-(14+2\cdot 16)]\cdot(2\cdot 12)-(2+28:4)-18:(14-48:24-56:8-2)$ [0]

120 $\{2+2\cdot 6\cdot[36-(4+7\cdot 4)+48:(4+4\cdot 11)]+(100:2):(45:3+35)\}:\{21-[140:7-(2+2\cdot 2)]\}$ [9]

121 $\{[135+3\cdot 5+(4+3\cdot 7)\cdot 2]:8\}:\{2+[8\cdot 11-(5+7\cdot 5)]:4+(39:3-2)\}$ [1]

122 ESEMPIO DIGITALE $3+12\cdot(4^2-3^2)+2^4\cdot(2^3-8)^3-2^2\cdot[(5^2-8\cdot 3)^2+3^2\cdot 2]$

123 $5\cdot 8:(2^3-2+2^2)+(7\cdot 9+7)\cdot 5^0-28:2^2$ [67]

124 $[(15:3\cdot 2)^3:10^2+2\cdot 2^2]:(2\cdot 3)$ [3]

125 $[(2^2\cdot 2^4):2^3]^2:2^4+5\cdot 7-3^2\cdot 2^2+(5^2\cdot 3^2)^0$ [4]

126 $[(243:81+4^3:4-3):(5-3^0)+125:25]\cdot 2^2:3$ [12]

127 $\{[(53^2-45^2):7+3\cdot 2^4]:[(21^2-7\cdot 8):7-17\cdot 3]^2+2\cdot 5^2\}^2:(2^2+2^3+2^4+2^5)+10\cdot 2^2$ [100]

128 $3^3-\{3\cdot 2^3-[(5\cdot 2^2-7)^2:13+12:(3\cdot 2^3-2^2\cdot 3)]:2\}^2:17^2$ [26]

129 $\{[(3^2+11):2^2]^2:5-1\}\cdot 2^3-[7^2:(2\cdot 3+1)+2^3+10^0]$ [16]

130 $\{[(6^0+2\cdot 5^2-11):2^3+8]-2^0\}:4+(7-4)\cdot 2+3^2\cdot 2$ [27]

Le espressioni letterali

131 ESERCIZIO GUIDA Calcoliamo il valore dell'espressione $3a^2-2b$, per $a=2$ e $b=5$.

Operiamo la sostituzione mettendo al posto delle lettere i valori scritti tra parentesi:

$$3\,a^2-2\,b$$

$$2\downarrow \qquad 5\downarrow$$

$$3\,(2)^2-2\,(5)=3\cdot 4-10=12-10=2.$$

Dopo un po' di pratica puoi evitare l'uso delle parentesi, avendo cura di scrivere i segni di moltiplicazione:

$3a^2-2b$, se $a=2$ e $b=5$, è uguale a $3\cdot 2^2-2\cdot 5$.

Calcola il valore delle espressioni (quando esiste) per i valori delle lettere scritti a fianco.

132 $5x$ $\quad x = 0, 2, 50.$
$2y$ $\quad y = 1, 6, 32.$

133 $2a - 5b$ $\quad a = 8, \quad b = 3.$
$3a - 2b$ $\quad a = 4, \quad b = 5.$

134 $2ab$ $\quad a = 7, \quad b = 8.$
$3a^2b$ $\quad a = 4, \quad b = 3.$
$3ab^2$ $\quad a = 1, \quad b = 2.$

135 $a^2 - b^2$ $\quad a = 3, \quad b = 2.$
$a^2 + b^2$ $\quad a = 1, \quad b = 4.$

136 a^b $\quad a = 299, \quad b = 0;$
$(2a)^b$ $\quad a = 0, \quad b = 6.$

137 $(a - b)^3 - 3ab$ $\quad a = 7, \quad b = 3.$
$2ab^2 - (a + b)^2$ $\quad a = 2, \quad b = 3.$
$2a^2 + b^2 - 2(a - b)^2$ $\quad a = 9, \quad b = 1.$

[1; 11; 35]

---

138 $(a - b)^2 + 4a^2b^3 - 7b^2 - 7a^3$ $\quad a = 4, \quad b = 2.$ [40]

139 $a^3 + b^3 - 2a^2 - (a + b - 4)^3$ $\quad a = 5, \quad b = 3.$ [38]

140 $a^3 : b^2 - (a - b)^2 - (a - b - 2)^3$ $\quad a = 8, \quad b = 4.$ [8]

141 $(a : b)^2 - 4a^2 : b^3 + a(a - b)^2 : b^5$ $\quad a = 36, \quad b = 4.$ [36]

142 $(a + b)^2 : 3a^2 + (b^2 - a^2) : (2a^2)$ $\quad a = 2, \quad b = 10.$ [24]

143 $(1 + a^3) : b^2 + 49(b^3 + 1) : (a + 2b)^2$ $\quad a = 3, \quad b = 2.$ [16]

144 $(a - 2b + 1)^3 : (a + b - 5)^2 + (a + 2b)^2 : (a - b)$ $\quad a = 8, \quad b = 2.$ [29]

145 $(a - b)^3 : 3b + 2a^3 : (4b) - b(a + b)^2 : (2a - 3)^2$ $\quad a = 6, \quad b = 3.$ [36]

Dalle parole alle espressioni

146 **ESERCIZIO GUIDA** Traduciamo in espressione la frase «Aggiungi al quadrato di a il quadrato di b e sottrai il doppio prodotto di a con b», poi calcoliamo il valore dell'espressione per $a = 9$ e $b = 5$.

«quadrato di a» $\rightarrow a^2$;
«quadrato di b» $\rightarrow b^2$;
«prodotto di a con b» $\rightarrow ab$;
«doppio prodotto» $\rightarrow 2ab$.
L'espressione è $a^2 + b^2 - 2ab$.
Sostituiamo $a = 9, b = 5$:

$$9^2 + 5^2 - 2 \cdot 9 \cdot 5 =$$
$$81 + 25 - 90 = 106 - 90 = 16.$$

Negli esercizi seguenti, traduci le frasi in espressioni letterali e calcola il loro valore per i numeri indicati.

147 Somma ad a il suo successivo; $a = 10$; $a = 7$.

148 Somma ad a i due consecutivi di a; $a = 4$; $a = 9$.

149 Somma ad a il suo precedente; $a = 1$; $a = 5$.

150 Somma al triplo di a il doppio di b; $a = 7, b = 0$; $a = 9, b = 4$.

151 Sottrai dal quintuplo di a il triplo di b; $a = 1$, $b = 0$; $a = 7, b = 9$.

152 Sottrai b dal prodotto del triplo di a col doppio di b; $a = 3, b = 5$; $a = 2, b = 10$.

ESERCIZI

153 Dividi la somma di a con b per la differenza fra a e b; $a = 5, b = 4$; $a = 8, b = 6$.

154 Moltiplica il doppio di a per il quadrato di b; $a = 5, b = 3$; $a = 2, b = 1$.

155 ESEMPIO DIGITALE Moltiplica il quadrato della differenza tra a e b per la differenza dei quadrati di a e b diminuita di 2; $a = 5$, $b = 4$; $a = 6$, $b = 3$.

156 Dividi il doppio di a per la differenza tra a e b; $a = 3, b = 1$. [3]

157 Al quintuplo di a sottrai la somma tra il doppio di b e a; $a = 3, b = 2$. [8]

158 Dividi il cubo di a per la somma di a e b; $a = 4, b = 12$. [4]

159 Moltiplica la somma di a e b per il doppio di a e poi aggiungi il triplo di b; $a = 2, b = 1$. [15]

160 Ad a diminuito di 3 somma la differenza dei quadrati di b e di a; $a = 4, b = 5$. [10]

Scrivi il precedente e il successivo dei numeri indicati dalle seguenti espressioni. Calcola le espressioni ottenute per $a = 2, b = 5, c = 1, n = 3, x = 4$.

161 a; $2a$; a^2; $a + 1$; $b + 1$; c^2.

162 $c - 1$; $2c + 1$; $2n + 1$; $n - 4$; $2n + 5$.

163 $n^2 + 1$; $2x^2$; $2x^2 - 1$; x^3; $(a + b)^2$.

Traduci in espressione letterale e calcola per i valori indicati.

164 Il successivo del doppio di un numero; 7.

165 Il doppio del successivo di un numero; 7.

166 Il precedente di un numero; 3.

167 La somma di due numeri per la loro differenza; 6; 1.

168 La differenza fra i quadrati di due numeri; 5; 3.

169 Il doppio prodotto di un numero per un altro; 2; 9.

170 YOU & MATHS Think of a number, double it, then add 3. Multiply your answer by 4 and take away 5. Now take away the number you first thought of. No matter what the first number was, your answer will be a multiple of:

A 2 B 3 C 5 D 7 E 11

(UK *Intermediate Mathematical Challenge*, 2003)

Dalle espressioni alle parole

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

Simboli e parole

Scrivi la frase che descrive l'espressione:

$$a^3 \cdot (3b + 1)$$

► **Esaminiamo l'espressione.**

L'espressione è una moltiplicazione tra due fattori. Quindi la frase che la descrive sarà: «Moltiplica… per…».

► **Scriviamo le parole che descrivono il primo fattore.**

Il primo fattore è a^3: «cubo di a».

► **Scriviamo le parole che descrivono il secondo fattore.**

Il secondo fattore è composto di due addendi, $3b$ e 1. Il primo addendo, $3b$, è descritto da: «il triplo di b». Il secondo addendo, $+1$, è descritto da: «il successivo di».
Quindi il secondo fattore è descritto da: «il successivo del triplo di b».

► **Scriviamo la frase che descrive l'espressione.**

Poiché l'operazione che lega i due fattori è la moltiplicazione, l'espressione è descritta da: «Moltiplica il cubo di a per il successivo del triplo di b».

Scrivi per ogni espressione la frase corrispondente. Calcola il valore delle espressioni per $a = 1$, $b = 6$; $a = 5$, $b = 2$.

171 $2a$; $3a$; b^2; $2ab$; $3a^2$; $3a^2b$.

172 $a + 1$; $b - 1$; $b + 2$; $2a - 1$; $a + b$.

173 $a - b$; $(a + b)(a - b)$; $a^2 - b^2$; $a^3 - b^3$.

174 $2a(a + b)^2$; $3b(b - 1)$; $4ab(2a + 1)$.

Dalle immagini alle espressioni

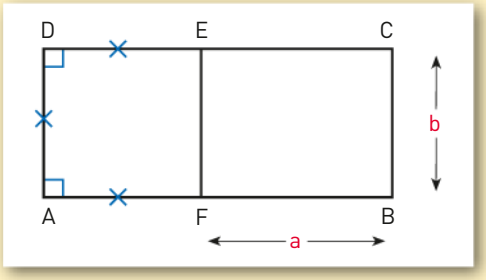
175 **ESERCIZIO GUIDA** Esprimiamo con un'espressione letterale la misura dell'area del rettangolo *ABCD*.

- *AFED* è un quadrato;
- *a* indica la misura di *FB*;
- *b* indica la misura di *BC*.

La misura dell'area del rettangolo *ABCD* è data dalla somma di quelle delle due figure:

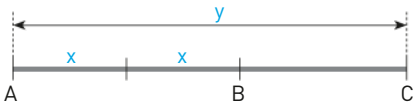
- quadrato *AFED*, di area b^2;
- rettangolo *FBCE*, di area ab.

L'espressione richiesta è: $b^2 + ab$.



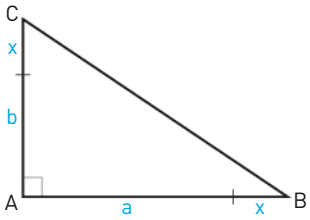
Per ognuna delle figure seguenti determina l'espressione della misura di ciò che è scritto sotto.

176



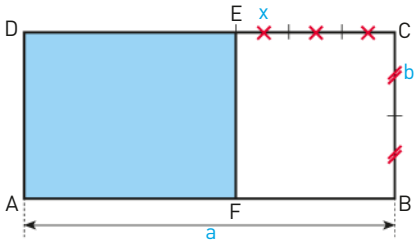
Lunghezza di *BC*.

177



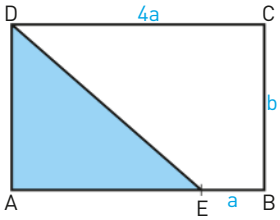
Area del triangolo *ABC*.

178



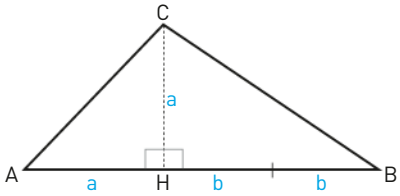
Perimetro e area del rettangolo *AFED*.

179



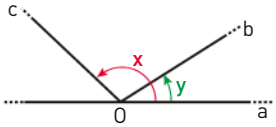
Perimetro del rettangolo *ABCD* e area del triangolo *AED*.

180



Area dei triangoli *ABC*, *ACH* e *CHB*.

181



Ampiezza dell'angolo $c\widehat{O}b$. Calcolarne il valore per: $\widehat{x} = 145°$, $\widehat{y} = 32°$. [113°]

ESERCIZI

5 Le proprietà delle operazioni

▶ Teoria a p. 8

182 Sono date le uguaglianze:

$2\cdot(4+5)=(2\cdot4)+(2\cdot5)$; $(2-4):2=(2:2)-(4:2)$; $2\cdot(4\cdot5)=(2\cdot4)\cdot5$.

Solo in due è stata applicata la proprietà distributiva. Quali?

183 VERO O FALSO?

a. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot(a\cdot c)$ V F

b. $(a+b)+c=a+(c+b)$ V F

c. $(a-b)+c=a-(b+c)$, con $a\geq b$ V F

d. $a\cdot(b+c)=(a\cdot c)+(b\cdot a)$ V F

e. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ V F

f. $a-b=(a-c)+(b-c)$, con $a\geq b\geq c$ V F

184 INVALSI 2004 Siano m e n due numeri naturali diversi da zero. Se si scambia m con n, quale delle seguenti espressioni modifica il proprio valore?

A $m+n$ B $m\cdot n$ C m^n D m^0-n^0

185 Discuti la validità della seguente affermazione: «In $\mathbb{N}$ la proprietà associativa vale sia per l'addizione sia per la sottrazione».

186 TEST Fra le seguenti coppie di operazioni, individua quella in cui entrambe *non* godono della proprietà commutativa:

A addizione e moltiplicazione.
B divisione e sottrazione.
C addizione e divisione.
D addizione e sottrazione.
E sottrazione e moltiplicazione.

Ciascuna delle seguenti uguaglianze fornisce un esempio di applicazione di una delle proprietà formali delle operazioni. Indica di quale proprietà si tratta.

187 $24+31=31+24$; $7+2+4=7+6$.

188 $(3+1)+4=3+(1+4)$; $(5+2)+3=3+(5+2)$.

189 $(18+24):3=18:3+24:3$; $(64-16):4=64:4-16:4$.

190 $4\cdot(2+3)=4\cdot2+4\cdot3$; $(2+3)\cdot4=4\cdot(2+3)$.

191 $18-6=(18+4)-(6+4)$; $27-12=(27-2)-(12-2)$.

192 $180:15=(180\cdot2):(15\cdot2)$; $120:15=(120:5):(15:5)$.

193 $15+9=9+15$; $7\cdot3=3\cdot7$.

194 $15:(3\cdot1)=15:(1\cdot3)$; $3\cdot(1+2)=3\cdot1+3\cdot2$.

195 $(15+2)+4=15+(2+4)$; $(3\cdot6)\cdot1=3\cdot(6\cdot1)$.

196 $17-(4\cdot3)=17-(3\cdot4)$; $(2+4)\cdot6=2\cdot6+4\cdot6$.

197 $17-3=(17+3)-(3+3)$; $(17+2)\cdot3=17\cdot3+2\cdot3$.

198 $(15+75):15=(15:15)+(75:15)$; $(7+3)+2=7+(3+2)$.

199 $12-4=(12-2)-(4-2)$; $80:40=(80:10):(40:10)$.

200 Fra le seguenti uguaglianze indica quali sono vere e qual è la proprietà applicata.

a. $(127+3)+8=127+(3+8)$;

b. $12:(4+2)=12:4+12:2$;

c. $(6+9)\cdot 3=3\cdot(6+9)$;

d. $(70-12)-8=70-(12-8)$;

e. $4\cdot(20:2)=(4\cdot 20):(2\cdot 20)$;

f. $10-8=15-13$;

g. $36-12=6\cdot(6-2)$;

h. $36:12=(36:6):(12:6)$.

COMPLETA

201 Completa precisando la proprietà che viene applicata.

$6\cdot(3+\square)=6\cdot 3+6\cdot 7$ ____

$\square\cdot(5+7)=6\cdot\square+6\cdot\square$ ____

$15\cdot 9+3\cdot\square=(\square+\square)\cdot 9$ ____

$12-4=(\square+5)-(4+\square)$ ____

$7\cdot(\square+4)=7\cdot 5+\square\cdot 4$ ____

$(3+\square)+13=3+(1+\square)$ ____

$2\cdot 8\cdot\square=\square\cdot(\square\cdot 6)$ ____

$5\cdot 3\cdot\square=4\cdot(5\cdot\square)$ ____

202 Completa scrivendo di fianco a ogni uguaglianza la proprietà delle operazioni su cui è basata. Scegli fra le seguenti: commutativa, associativa, distributiva, raccoglimento, invariantiva.

$5+7+9=9+5+7$ ____

$20:4=10:2$ ____

$5\cdot 8\cdot 9=5\cdot 72$ ____

$5+5\cdot 2+5\cdot 3=5\cdot(1+2+3)$ ____

$15-8=16-9$ ____

$18-5=15-2$ ____

$3\cdot 2+6\cdot 2+5\cdot 2=(3+6+5)\cdot 2$ ____

$60:30=6:3$ ____

203 **TEST** Una delle seguenti uguaglianze è *falsa* (non è stata applicata correttamente la proprietà invariantiva). Quale? Motiva la risposta.

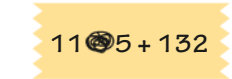
A $10-8=12-10$

B $80:4=40:2$

C $60:4=64:8$

D $150:25=600:100$

204 **INTORNO A NOI** Manuel è un po' distratto e, mentre fa i compiti, cancella in un'espressione una cifra scritta male, ma dimentica di riscriverla. Il giorno dopo si accorge della dimenticanza, ma non ricorda la cifra mancante; ricorda solo che il risultato dell'addizione è divisibile per 9. Aiuta Manuel trovando la cifra.



6 Le proprietà delle potenze

▶ Teoria a p. 12

205 **VERO O FALSO?**

a. $a^n\cdot a^m=a^{m-n}$ V F

b. $a^n+a^m=a^{n+m}$ V F

c. $a^n\cdot a^0=a^n$ V F

d. $a^n:a^m=a^{m-n}$ V F

e. $(a^m)^n=(a^n)^m$ V F

f. $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$ V F

206 **TEST** Una sola delle seguenti espressioni è equivalente a 6^2+6^3. Quale?

A $(2\cdot 3)^3+(2\cdot 3)^2$

B $2\cdot(3^2+3^3)$

C $3\cdot(2^2+2^3)$

D 6^3

E $(2\cdot 3)^5$

ESERCIZI

207 VERO O FALSO?

a. La somma dei quadrati di due numeri è uguale al quadrato della loro somma. V F

b. La somma di due potenze è una potenza che ha per base la somma delle basi e per esponente la somma degli esponenti. V F

c. Il prodotto dei quadrati di due numeri è uguale al quadrato del prodotto dei due numeri. V F

d. Il prodotto di due potenze uguali è uguale al quadrato della potenza. V F

208 TEST All'espressione $(5 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c)^2$ viene applicata una proprietà delle potenze. Qual è l'espressione equivalente ottenuta?

A $25 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^2$ C $5 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^2$ E $5 \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^2$

B $25 \cdot a^6 \cdot b^2 \cdot c$ D $25 \cdot a^6 \cdot b^4 \cdot c^2$

Applica, quando è possibile, le proprietà delle potenze e indica la proprietà applicata.

209 $(3^4)^2 \cdot 3^7$; $2^4 \cdot 3^4$; $(5^3)^5 \cdot 2^{15}$.

210 $3^2 \cdot (3^4)^2$; $(10^2)^5 : 2^{10}$; $3^4 : 3^2$.

211 $(8^4 : 2^4) \cdot 4^3$; $(2^2 : 2^1)^4$; $(3^2)^3 \cdot 2^6$.

212 $(7^2 \cdot 2^2) : 7^2$; $(4^3)^2 : 2^6$; $2^4 \cdot 3^4$.

213 $6^5 : 2^5$; $(4^5)^2$; $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^1$.

214 $2^2 \cdot 5^2$; $3^3 : 3^2$; $12^4 : 4^4$.

COMPLETA quando è possibile.

215 $2^5 \cdot 2^{\square} = 2^{10}$; $7^2 \cdot \square = 7^8$.

216 $2^4 \cdot (\square)^4 = 16^4$; $(5^{\square})^4 = 5^7$.

217 $3^{\square} : 3^3 = 3^3$; $2^{\square} : 2^8 = 2^5$.

218 $2^4 \cdot 2^{\square} = 2^7$; $8^4 : (\square)^4 = 2^4$.

219 $15^2 : (\square)^2 = 5^2$; $(4^{\square})^5 = 4^{10}$.

220 $2^3 \cdot (\square)^3 = 16^3$; $(5^{\square})^3 = 5^{15}$.

221 INVALSI 2012 La decima parte di 10^{20} è:

A 10^{10} B 1^{20} C 100 D 10^{19}

222 INVALSI 2006 $(5^9 : 5^4) : 5^3 + 5^2 =$

A 1 B 5^4 C 10^2 D 50

223 $A = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots\}$ è l'insieme delle potenze di 2. A è chiuso rispetto all'operazione di addizione? E a quella di moltiplicazione? Giustifica le risposte.

224 VERO O FALSO?

a. $5^3 + 5^4 = 5^7$ V F

b. $3^5 - 3 = 3^4$ V F

c. $2^3 \cdot 2^6 = 2^9$ V F

d. $6^2 \cdot 6^4 = 6^8$ V F

e. $10^2 : 5^2 = 2^2$ V F

225 Scrivi i prodotti mediante potenze, come nell'esempio svolto.

$2 \cdot 4 \cdot 7 = 2 \cdot 2^2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 7$

$9 \cdot 2 \cdot 81 \cdot 8$; $5 \cdot 3 \cdot 125 \cdot 9$; $6 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 32$.

$24 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3^4$; $10 \cdot 25 \cdot 100 \cdot 10^4$; $40 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 9$.

226 ASSOCIA a ogni espressione il proprio risultato.

1. $(5^4)^2 \cdot 5$ **2.** $(5^2)^4 : 5$ **3.** $(5^3 + 5^2) : 5^2$ **4.** $(2^3 \cdot 5^3) : 10$

a. 5^7 **b.** 6 **c.** 100 **d.** 5^9

227 INVALSI 2015 L'espressione $a^{43} + a^{44}$ è uguale a

A $a^{44 \cdot 43}$ B $a^{43} \cdot (a+1)$ C a^{87} D $2a^{87}$

228 INVALSI 2014 Il risultato di $16^{100} : 2$ è uguale a

A 8^{99} B 8^{100} C 16^{50} D 2^{399}

229 VERO O FALSO?

a. $5^4 \cdot 5^2 = 5^6$ V F

b. $5^4 + 5^2 = 5^6$ V F

c. $(2^2)^3 = 2^5$ V F

d. $2^8 = 2^4 + 2^4$ V F

e. $3^9 = 3^5 \cdot 3^4$ V F

f. $2^8 = (2^2)^4$ V F

230 EUREKA! **Addizione bizzarra** Se $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$, quanto vale n?

A 1005 D 2011

B 1006 E Nessuno dei numeri precedenti.

C 2010

(*Kangourou Italia*, 2011)

COMPLETA le seguenti uguaglianze.

231 $7^0 = 5^{\square}$; $(2^3)^2 = (2^2)^{\square}$; $(2^{\square})^2 \cdot \square = 2^7$.

232 $3^4 - 4^3 = (\square)^1$; $(1^6)^{\square} = 5^0$; $(15^{\square})^2 : 15 = 15^5$.

233 $\square^3 \cdot \square^3 = 6^3$; $(7^3)^4 : 7^{\square} = 7^7$; $(3^{\square})^4 = 3^{24}$.

234 $3^4 : 3^{\square} = 3^4$; $(18:3)^3 = 18^3 : \square$; $(2 \cdot 4 \cdot 5^2)^2 = 2^{\square} \cdot 4^{\square} \cdot 5^{\square}$.

Proprietà delle operazioni e proprietà delle potenze

Per ogni uguaglianza indica quale proprietà è stata applicata. Verifica le uguaglianze per i valori indicati.

235 $a^4 b = b a^4$; $a = 3, b = 2$. $c^3 + d^3 = d^3 + c^3$; $c = 4, d = 1$.

236 $(a^2 + b^2) + c = a^2 + (b^2 + c)$; $a = 1, b = 2, c = 3$. $a - b^2 = (a + c^3) - (b^2 + c^3)$; $a = 3, b = 1, c = 2$.

237 $a^4 : b^4 = (a:b)^4$; $a = 20, b = 5$. $a^4 : b^4 = (a^4 d) : (b^4 d)$; $a = 6, b = 2, d = 3$.

238 $c^3 \cdot c^7 \cdot c^2 = c^{12}$; $c = 2$. $(a^2)^b = a^{2b}$; $a = 2, b = 3$.

239 $(1 + a^4)b = b + a^4 b$; $a = 2, b = 7$. $2a(b^2 - c) = 2ab^2 - 2ac$; $a = 9, b = 3, c = 6$.

240 $a^2 b^2 c^2 = (abc)^2$; $a = 2, b = 3, c = 2$. $8a^3 b^3 = (2ab)^3$; $a = 3, b = 1$.

ESERCIZI

Espressioni e proprietà delle potenze

Applicando le proprietà delle potenze, calcola il valore delle seguenti espressioni.

241 $2^5 : 2^4 + 2 \cdot 2^2 - 2^0$ [9]

242 $(3^4 : 3^3)^4 \cdot 3^5 : (3^2)^4$ [3]

243 ESEMPIO DIGITALE
$64^4 : (2^2 \cdot 4^2)^3 - [(12^5 : 3^5) \cdot 4] : 16^2$

244 $4^2 \cdot 4^0 - 3^5 : 3^3 + 5^0$ [8]

245 $5^3 : 5^1 \cdot 2^2 : 5^2$ [4]

246 $2^6 \cdot 3^6 : (18^4 : 3^4)$ [36]

247 $(4^2 : 2^2)^3 \cdot 2^2 : (6^6 : 3^6)$ [4]

248 $[(3)^2 \cdot (3)^3] : (3)^2 + [(2)^5 : (2)^3]^2 : (2^2)^2$ [28]

249 $[6^6 \cdot 4^6 : (3^2 \cdot 8^2)] : 8^4$ [81]

250 $(4^2 \cdot 2^2) : 2^2 - 5^2 : 5^1 + (2^2 \cdot 3^2)^3 : 6^5$ [17]

251 $3^3 - \{[(4^2)^3]^2\}^0 - 2^4 - [(5^2)^1]^2 : 5^3$ [5]

252 $(2^2 \cdot 3^6 \cdot 2^4) : (3^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^3) - 1$ [0]

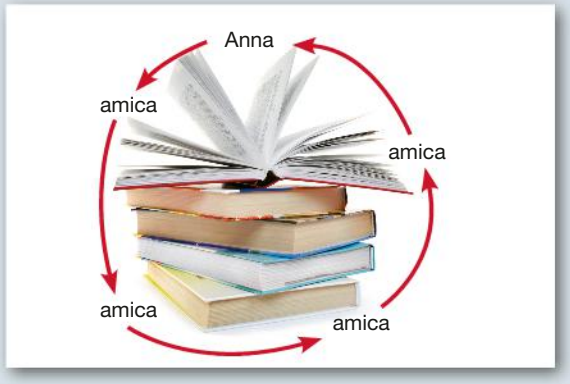
253 $[(8^6 \cdot 16^4) \cdot 64^3] : (2^9 \cdot 4^5) : (8^7 \cdot 4^4)$ [16]

254 $[(1+2)^3 \cdot (1+4)^3] : [(6^8 : 6^4) : 3^4 - 1]^2$ [15]

255 $4 \cdot 5 - 2^2 \cdot 2^3 : 2 + (3^2 \cdot 2^2) : 6 - (2^4 \cdot 3^4)^0$ [9]

MATEMATICA INTORNO A NOI

Scambio di libri Anna, Bianca e Carla organizzano una catena di scambio libri…



Problema e risoluzione – 2 esercizi in più.

256 $3^2 \cdot 2^2 + (3^6 : 3^4)^0 - 25^2 : 5^2 + (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) \cdot (4^3 : 4^2)$ [12]

257 $10 \cdot [(12^2 : 3^2) : 2^2] - [(2)^2]^2 + 7 \cdot 3 - (25^4 : 5^4)^0 - 10^3 : 5^3$ [36]

258 $[(6^2 \cdot 6^4) : (6 \cdot 6^2)]^2 : (6^2)^2 - [(2^2 \cdot 8^2) : 16] \cdot 2$ [4]

259 $2 \cdot 6 - (3^2 + 1) + (2^2 \cdot 3^2)^0 + 15^3 : 5^3 - (3^2)^2 : 3^3$ [27]

260 $7 \cdot [(5^2 \cdot 5^3)^3 : 5^{14}] - 3 \cdot 2^0 - 6^5 : 3^5$ [0]

261 $7 \cdot 4 + (2^6 : 2^4)^0 - 25^2 : 5^2 + (7 \cdot 3 - 5 \cdot 4) \cdot (5^3 : 5^2)$ [9]

262 $15 \cdot [(12^2 : 3^2) : 2^2] - [(2)^2]^2 + 7 \cdot 3 - (20^4 : 5^4)^0 - 15^3 : 5^3$ [37]

263 $[(3^2)^3 : (3^2)^2] + \{(5^4 \cdot 5^2)^3 : [(5^2)^3]^2\} : (5^2 \cdot 5^3) - 6$ [8]

264 $\{[(2^3 + 2^2) : 2^2 - 3^0]^2 - 1\}^3 - \{(8^3 : 4^3 - 5) \cdot [(5^3)^4 : (5^4)^3]^5\}^2$ [18]

265 $8^2 \cdot 2^8 \cdot 16^4 : (4^3)^4 + (15^5 - 15^4) : 15^4 + (2^8)^0 \cdot 2 + (39^4 : 13^4)^2 : 9^4$ [81]

266 $(7^4:7)^2:(7^2)^2-[(3^2\cdot 3^0\cdot 3^3)^2:(3^3)^3+2^0+2^2-3^1]+5^2$ [69]

267 $[21:7\cdot 4-(2^3-2^2)^0+26\cdot 2^2:13-(6-2^2-9:3^2)]:[6\cdot 4-2^4+(32:2^5)^4]$ [2]

268 $[16^0+5^2-(3^3-5)]\cdot[2\cdot 2^3-(40:2^2-3)]-(2^3+2^2+2^1+2^0):(3\cdot 2^0)$ [31]

7 I multipli e i divisori di un numero

▶ Teoria a p. 14

269 VERO O FALSO?

a. Ogni numero naturale diverso da 0 ha almeno due divisori. V F

b. Il numero 0 ha solo un multiplo. V F

c. Tra i multipli di ogni numero naturale c'è sempre 0. V F

d. Tutti i multipli di 1 costituiscono l'insieme dei numeri naturali. V F

270 Quale numero naturale ha come multiplo solo se stesso e infiniti divisori? Quale invece ha solo un divisore e infiniti multipli?

271 VERO O FALSO?

a. 0 è divisore di ogni numero. V F

b. 0 è multiplo di ogni numero. V F

c. 0 è divisibile per qualsiasi numero. V F

d. 1 è divisore di ogni numero. V F

e. Il divisore di un numero non è divisore di un suo multiplo. V F

272 COMPLETA la tabella applicando i criteri di divisibilità per indicare se i numeri della prima colonna sono divisibili per 2, 3, 5, …

a	2	3	5	10	11	35
45						
60				sì		
171						
506		no				
1625						
2304	sì					
4950						
5400						sì

273 TEST Se un numero naturale n è divisibile per 3 e per 7, allora è divisibile per:

A $3+7$. C 37. E 7^3.

B $3\cdot 7$. D 3^7.

274 INTORNO A NOI **Compito per casa** Devo svolgere 21 espressioni numerate da 1 a 21 in 3 giorni. Se il primo giorno svolgo gli esercizi con un numero multiplo di 3 e il secondo gli esercizi contrassegnati da un numero multiplo di 7, quanti esercizi mi rimangono da fare? [12]

275 INVALSI 2011 In un torneo di calcio fra scuole una squadra guadagna 3 punti se vince, 1 punto se pareggia e nessun punto se perde. Una squadra ha vinto tante partite quante ne ha pareggiate. Quale dei seguenti punteggi *non* può aver totalizzato la squadra?

A 24 B 28 C 30 D 32

276 EUREKA! **Quante cifre!** Stabilisci se il numero $10^{14}-1$ è divisibile per 99.

277 EUREKA! **Numeri e cartoncini** Hai 18 cartoncini su ciascuno dei quali sta scritto un solo numero: 4 oppure 5. La somma di tutti i numeri sui cartoncini è divisibile per 17. Su quanti cartoncini è scritto il numero 4?

A 4 B 5 C 6 D 7 E 9

(*Kangourou Italia*, 2010)

278 EUREKA! **Numeri pari superstiti!** Luca scrive sulla lavagna tutti i numeri pari consecutivi da 2 a 2010 (compresi). Poi Giovanni cancella tutti i numeri che sono multipli di 3. Quanti numeri rimangono?

A 670 B 710 C 840 D 905 E 1005

(*Giochi di Archimede*, 2010)

ESERCIZI

8 Il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo

▶ Teoria a p. 15

La scomposizione in fattori primi

279 Qual è il più piccolo numero primo?

280 Fra i numeri 121, 37, 14, solo due sono scomponibili in fattori primi. Quali?

281 VERO O FALSO?

a. Ogni numero primo è dispari. V F

b. Ogni numero dispari è primo. V F

c. Ogni numero pari si scompone in fattori primi. V F

d. Ogni numero scomposto in fattori primi non è primo. V F

Le seguenti scomposizioni non sono in fattori primi. Modificale in modo che ogni fattore sia primo e scrivi la scomposizione in potenze di numeri primi.

282 $5 \cdot 15$; $4 \cdot 3$; $4 \cdot 8$; $21 \cdot 3$.

283 $4 \cdot 9$; $4 \cdot 10$; $5 \cdot 25$; $6 \cdot 6$.

284 $2 \cdot 3 \cdot 9$; $7 \cdot 8 \cdot 3$; $2 \cdot 10 \cdot 14$; $2 \cdot 15 \cdot 6$.

285 ESERCIZIO GUIDA Scomponiamo in fattori primi 980 e 360.

Cerchiamo il più piccolo divisore primo di 980; è 2, poiché l'ultima cifra è pari. Scriviamo:

$$\begin{array}{r|l} 980 & 2 \end{array}$$

Calcoliamo $980 : 2$, riportiamo il quoziente sotto 980 e cerchiamone il più piccolo divisore primo:

$$\begin{array}{r|l} 980 & 2 \\ 490 & 2 \end{array}$$

Procediamo in questo modo fino a ottenere come quoziente 1:

$$\begin{array}{r|l} 980 & 2 \\ 490 & 2 \\ 245 & 5 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

La scomposizione in fattori primi di 980 è:

$2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^2$.

Possiamo seguire anche un metodo più veloce, ma meno automatico: con il calcolo mentale operiamo delle scomposizioni parziali, come negli esercizi precedenti dal 292 al 294, poi applichiamo le proprietà delle potenze.

Scomponiamo in questo modo 360:

$360 = 10 \cdot 36 = 2 \cdot 5 \cdot 6^2 = 2 \cdot 5 \cdot (3 \cdot 2)^2 =$
$2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Scomponi in fattori primi i seguenti numeri.

286 ESEMPIO DIGITALE

1500; 312; 7250; 4096.

287 69; 70; 121; 125; 144.

288 40; 42; 75; 225; 300; 405.

289 320; 660; 740; 850; 1000.

290 1500; 2000; 3300; 4800; 5000.

291 **INVALSI 2011** Considera l'affermazione «Per ogni numero naturale n, $2^n + 1$ è un numero primo». Mostra con un esempio che l'affermazione è falsa.

292 **EUREKA!** **Una sola è falsa** Una sola tra le seguenti affermazioni relative ai numeri primi è *falsa*. Quale?

- **A** La somma di due numeri primi può essere un numero primo.
- **B** La somma di tre numeri primi non può essere un numero primo.
- **C** La differenza fra due numeri primi distinti può essere un numero primo.
- **D** Il prodotto di due numeri primi non è mai un numero primo.

MATEMATICA AL COMPUTER

I numeri di Fibonacci Nella successione di Fibonacci:

1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 ...

ogni numero (a parte i primi due 1) è ottenuto dalla somma dei due numeri che lo precedono.
Il blocco di Wiris in figura, letto il numero naturale g, stabilisce se è un numero di Fibonacci oppure no.

```
I numeri di Fibonacci
F=[1, 1]; i=2; g=987;
ripetere
   i=i+1
   F=aggiungere(F, F_{i-1}+F_{i-2})
fino_a_quando F_i≥g;
se F_i=g allora
   O=[g, " è un numero di Fibonacci"]
altrimenti
   O=[g, " non è un numero di Fibonacci"]
fine ;
O
```

Problema e risoluzione – 6 esercizi in più.

Il massimo comune divisore

293 **VERO O FALSO?**

- **a.** Il MCD di due numeri esiste sempre. V F
- **b.** Il MCD di due numeri primi è 0. V F
- **c.** Il MCD di due numeri pari è il numero minore tra i due. V F
- **d.** Se MCD$(a; b) =$, allora b è divisore di a. V F
- **e.** Il MCD di due numeri primi è uguale al più grande dei numeri. V F
- **f.** Il MCD di due numeri primi fra loro è uguale al minore dei due numeri. V F

Calcola il MCD dei seguenti gruppi di numeri.

294 6, 8; 21, 24; 20, 30; 5, 6.

295 4, 20; 6, 18; 20, 60; 5, 10.

296 12, 18, 24; 8, 20, 16; 10, 20, 30.

Il minimo comune multiplo

297 **SPIEGA PERCHÉ** il mcm tra 4 e 5 è 20. Come sono tra loro questi numeri?

298 **VERO O FALSO?**

- **a.** Dati due numeri, ognuno è divisore del loro mcm. V F
- **b.** Se mcm$(a; b) =$, allora a e b sono divisori di c. V F
- **c.** Se mcm$(a; b) =$, allora b è divisore di a. V F
- **d.** Se mcm$(a; b) =$, allora a e b sono numeri primi. V F
- **e.** Il mcm di due numeri primi non esiste. V F
- **f.** Se MCD$(a; b) =$ mcm$(a; b)$, allora $a = b$. V F

ESERCIZI

Calcola il mcm dei seguenti gruppi di numeri.

299 3, 4; 30, 40; 300, 400.

300 15, 20; 25, 30; 56, 72; 8, 12.

Determinare MCD e mcm

301 ESERCIZIO GUIDA Mediante la scomposizione in fattori primi, determiniamo il MCD e il mcm dei numeri: 60, 15, 18.

Scomponiamo ciascun numero in fattori primi, incolonnando i fattori uguali:

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$
$$15 = 3 \cdot 5,$$
$$18 = 2 \cdot 3^2.$$

Il MCD è il prodotto dei fattori comuni, ciascuno preso con l'esponente più piccolo:

$$\text{MCD}(60; 15; 18) = 3.$$

Il mcm è il prodotto di tutti i fattori, comuni e non comuni, ciascuno preso con l'esponente più grande:

$$\text{mcm}(60; 15; 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180.$$

Mediante la scomposizione in fattori primi determina il MCD e il mcm dei seguenti gruppi di numeri.

302 12, 4, 6.

303 12, 8.

304 90, 30, 150.

305 14, 24, 22.

306 63, 168.

307 28, 18.

308 ESEMPIO DIGITALE 240, 150, 54.

309 63, 9, 25.

310 10, 45, 90.

311 Il MCD di due numeri naturali è 2 e il loro mcm 60. Se si moltiplicano entrambi i numeri per 2, quanto vale il loro MCD? Se si moltiplica il primo per 2 e il secondo per 7, si può stabilire quanto diventa il loro mcm? [4; no]

Determina il MCD dei seguenti gruppi di numeri utilizzando gli algoritmi di Euclide delle sottrazioni successive e delle divisioni successive. Determina poi il mcm utilizzando la formula che lo lega al MCD.

312 4, 16; 15, 20; 22, 7.

313 20, 40; 32, 44; 35, 72.

314 56, 70 72, 99; 45, 300.

315 10, 1000 60, 1500; 5, 1080.

MATEMATICA E STORIA

Divisione e resto nella Firenze del '300 Paolo dell'Abbaco, matematico, astronomo e poeta italiano del '300, scrisse il *Trattato d'Aritmetica*, da cui è ricavato il seguente problema con relativa soluzione, che in italiano si presenta nella forma: «Trova un numero che diviso per 2 dia resto 1, diviso per 3 dia resto 2, diviso per 4 dia resto 3, diviso per 5 dia resto 4 e così via fino a 10».

Ambrogio Lorenzetti, *Effetti del Buon Governo in città* (particolare), affresco su parete (1339 circa), Palazzo Pubblico, Siena.

Risoluzione – Attività di ricerca: Scuole d'abaco e società.

RISOLVIAMO UN PROBLEMA

Missione umanitaria

Un'associazione ONLUS organizza una missione umanitaria in Congo grazie all'aiuto di numerosi volontari.
L'associazione forma delle squadre con i seguenti criteri: in ogni squadra ci deve essere almeno un rappresentante di ciascun mestiere; le squadre devono avere la stessa composizione; occorre formare quante più squadre possibili.

- Calcola il numero di squadre che l'associazione può inviare in missione.
- Indica da quanti e quali operatori è formata ogni squadra.

► Calcoliamo il numero di squadre.

Per trovare il numero massimo delle squadre con la stessa composizione e con almeno un rappresentante di ciascun mestiere, consideriamo quanto segue: i volontari di ogni categoria devono essere suddivisi in parti uguali nelle diverse squadre. Questo significa che dobbiamo avere lo stesso numero di medici in ogni squadra, quindi il numero delle squadre deve essere un divisore del numero dei medici. In modo analogo, il numero delle squadre deve anche essere un divisore del numero degli infermieri, degli insegnanti e così via.
In definitiva, il numero delle squadre deve essere un divisore comune di tutti i numeri di volontari delle varie categorie. Per avere il numero massimo di squadre, dobbiamo quindi calcolare il massimo comune divisore dei numeri di volontari di ciascuna categoria.

► Calcoliamo le fattorizzazioni.

Categoria	Volontari	Fattorizzazione
medici	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$
infermieri	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$
insegnanti	12	$2^2 \cdot 3$
muratori	24	$2^3 \cdot 3$
idraulici	18	$2 \cdot 3^2$
elettricisti	18	$2 \cdot 3^2$
cuochi	12	$2^2 \cdot 3$

► Ricaviamo il massimo comune divisore.

Per determinare il MCD prendiamo i fattori comuni con il minimo esponente:

$$\text{MCD}(30; 12; 24; 18) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Possiamo quindi formare al massimo 6 squadre con i requisiti richiesti.

► Determiniamo da quanti operatori di ciascuna categoria è formata ciascuna squadra.

Per calcolare da quanti volontari di ciascuna categoria è formata ogni squadra, dividiamo il numero totale dei volontari per il MCD trovato. Riportiamo il risultato in una nuova colonna della tabella.

Categoria	Volontari	Composizione squadra
medici	30	$30 : 6 = 5$
infermieri	30	$30 : 6 = 5$
insegnanti	12	$12 : 6 = 2$
muratori	24	$24 : 6 = 4$
idraulici	18	$18 : 6 = 3$
elettricisti	18	$18 : 6 = 3$
cuochi	12	$12 : 6 = 2$

In ogni squadra, quindi, ci saranno: 5 medici, 5 infermieri, 2 insegnanti, 4 muratori, 3 idraulici, 3 elettricisti, 2 cuochi.

ESERCIZI

Problemi INTORNO A NOI

316 INVALSI 2010 Filippo si prepara per una gara di triathlon. Si allena nel nuoto ogni 3 giorni, nella corsa a piedi ogni 6 giorni e nella corsa in bicicletta ogni 8 giorni. Se oggi si è allenato in tutti e tre gli sport, tra quanti giorni gli accadrà di nuovo di allenarsi nei tre sport nella stessa giornata?

A 8 B 12 C 17 D 24

317 ESEMPIO DIGITALE **Coincidenze** Due treni viaggiano sullo stesso percorso; uno di essi completa il tragitto di andata e ritorno in 4 ore, l'altro in 6. Se in questo momento si trovano nella stessa stazione, tra quanto tempo si incontreranno di nuovo nella stessa stazione?

318 **Momenti unici** Una cometa ha un periodo di 75 anni, un'altra di 100. Se le due comete erano entrambe visibili dalla Terra 100 anni fa, tra quanti anni si potranno rivedere insieme? [200]

319 **Super spuntino!** In un campeggio estivo è ora di fare merenda. Se gli educatori hanno a disposizione 108 fette di formaggio, 162 fette di salume, 54 fette di pomodoro e 270 foglie di insalata, qual è il numero massimo di panini imbottiti uguali che possono preparare? Quante foglie di insalata ci sono in ogni panino? [54; 5]

320 INVALSI 2013 In un quartiere di una città, il calendario della raccolta differenziata (carta, vetro e plastica) prevede che la raccolta della carta avvenga ogni 28 giorni, quella del vetro ogni 21 giorni e quella della plastica ogni 14 giorni. Oggi sono state effettuate le raccolte di carta, vetro e plastica. La prossima volta in cui la raccolta di carta, vetro e plastica verrà fatta contemporaneamente sarà fra ____ giorni.

321 TEST **Dal dottore** Loretta si reca ogni 13 giorni in un ambulatorio per una cura. Il giovedì, e solo il giovedì, nell'ambulatorio presta servizio Franco, l'infermiere preferito di Loretta. Sapendo che oggi, giovedì, Loretta è andata all'ambulatorio, tra quanti giorni rivedrà Franco?

A 14 B 35 C 53 D 65 E 91 (*Giochi di Archimede*, 2012)

9 I sistemi di numerazione

▶ Teoria a p. 19

Il sistema a base dieci

Scrivi in forma polinomiale i seguenti numeri.

322 138; 427; 3321; 1000.

323 1010; 1001; 1100; 2222.

Scrivi i numeri a cui corrispondono le seguenti espressioni senza svolgere i calcoli.

324 $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10 + 7$; $5 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 1$.

325 $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^3 + 5 + 9 \cdot 10$; $1 \cdot 10 + 2 + 7 \cdot 10^2$.

326 YOU & MATHS **What number is it?** Below are some descriptions of numbers given by a child who is still learning about decimal positional notation. Rewrite the numbers in correct decimal positional notation.

a. Four units and eleven tens.
b. Twenty three hundreds and forty units.
c. Two thousands, thirty two hundreds, fifty one units.

I sistemi con altre basi

327 VERO O FALSO?

a. Un numero può essere scritto in forma polinomiale solo se è in base 10. V F

b. I simboli che si possono usare in base 4 sono $0, 1, 2, 3, 4$. V F

c. Nel numero $(143)_5$ la cifra 1 indica $1 \cdot 5^2$. V F

d. $1 + 1 = 10$ in base 2. V F

e. Il numero 10 in qualunque base n indica la base n. V F

328 Fra i numeri 7, 15 e 29, solo uno ha come corrispondente $(11101)_2$. Quale?

329 Scrivi i primi dieci numeri naturali in base due.

Scrivi i seguenti numeri in forma polinomiale.

330 $(1)_2$; $(1)_3$; $(1)_4$; $(1)_5$.

331 $(10)_2$; $(10)_3$; $(10)_4$; $(10)_6$.

332 $(11)_2$; $(11)_3$; $(111)_2$; $(111)_3$.

333 $(1101)_2$; $(1001)_2$; $(1111)_2$; $(1000)_3$.

334 $(1201)_3$; $(1000)_4$; $(1222)_3$; $(200)_4$.

Operazioni con altre basi

335 ESERCIZIO GUIDA Dopo aver costruito le tabelle di addizione e moltiplicazione in base tre, calcoliamo:

$(211)_3 + (122)_3$; $(212)_3 \cdot (21)_3$.

Le tabelle cercate sono:

base tre

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	10
2	2	10	11

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

Eseguiamo i calcoli utilizzando le tabelle e la tecnica del riporto.

base tre

```
   11
  211 +        212 ·
  122            21
 ----         ----
 1110           212
              1201–
             -----
             12222
```

Dopo aver costruito le tabelle di addizione e moltiplicazione in base due, esegui i seguenti calcoli (i numeri sono espressi in base due).

336 $1101 + 111$; $1001 + 1110$; $111 + 111$.

337 $110 + 10110$; $1000 + 1010 + 1011$.

338 $110 \cdot 11$; $1010 \cdot 100$; $1110 \cdot 1101$.

ESERCIZI

Calcola i risultati delle seguenti operazioni fra numeri espressi in base tre.

339 $201 + 111$; $101 + 220$; $222 + 111$.

340 $212 + 100$; $1011 + 2112$; $2001 + 2212$.

341 $21 \cdot 12$; $21 \cdot 100$; $21 \cdot 22$.

342 $122 \cdot 110$; $12 \cdot 200$; $10 \cdot 212$.

343 Costruisci le tabelle di addizione e moltiplicazione in base cinque.

Da una base qualsiasi a base dieci e viceversa

Scrivi nel sistema a base dieci i seguenti numeri.

344 $(101)_2$; $(1110)_2$; $(10000)_2$; $(10111)_2$.

345 $(10)_3$; $(100)_3$; $(2012)_3$; $(222)_3$.

346 $(10)_5$; $(100)_5$; $(222)_5$; $(314)_5$.

347 $(321)_4$; $(123)_4$; $(27A)_{12}$; $(2B)_{12}$.

348 $(100)_8$; $(19F)_{16}$; $(1ABC)_{16}$; $(100)_{12}$.

349 EUREKA! **Due basi** Del numero naturale x si sa che rispetto alla base a la sua scrittura è 12; rispetto alla base b è invece 23. Quale tra le seguenti affermazioni è *falsa*?

A La base a è maggiore della base b.
B Esistono infinite coppie possibili di basi a e b che soddisfano le ipotesi.
C La base a può essere 6.
D Se $b = 4$, allora $a = 9$.

Trasforma i seguenti numeri in base dieci nella base indicata, a mente o aiutandoti con uno schema grafico.

350 $5, 8, 16, 15, 17, 64, 66$; base 2.

351 $4, 9, 12, 13, 15, 30, 32, 81, 80$; base 3.

352 $5, 8, 20, 27, 32$; base 4.

353 $5, 10, 15, 16, 20, 19, 50, 56$; base 5.

354 $12, 16, 23, 32, 41, 64, 80, 100, 800$; base 8.

355 $21, 62, 124, 240$; base 12.

356 $17, 64, 144, 1025$; base 16.

Nei seguenti esercizi scrivi nella base indicata i numeri espressi in base dieci, mediante il metodo delle divisioni successive.

357 $10, 15, 26, 37, 48$; base 2.

358 $100, 204, 327, 412$; base 3.

359 $64, 88, 137, 1600$; base 4.

360 $1712, 350, 427, 1000$; base 5.

VERIFICA DELLE COMPETENZE ALLENAMENTO

UTILIZZARE TECNICHE E PROCEDURE DI CALCOLO

TEST

1 Solo in una delle seguenti uguaglianze è stata applicata la proprietà invariantiva della divisione. Quale?

A $36:12 = 34:10$
B $36:12 = 24:1$
C $36:12 = 9:3$
D $36:12 = 3 \cdot 1$
E $36:12 = 2 + 1$

2 Solo in una delle seguenti uguaglianze è stata applicata in modo corretto la proprietà distributiva. Quale?

A $(12 \cdot 6) + 3 = 36 \cdot 18$
B $(12:6) + 1 = 13:6$
C $(12 + 6) \cdot 2 = 24 + 12$
D $(12 - 6) + 2 = 14 - 8$
E $(12 \cdot 6):2 = 24:3$

3 Il successivo del numero $2n - 1$ è:

A $n + 1$.
B $2(n + 1) - 1$.
C $2(n + 1)$.
D $2n + 1$.
E $2n$.

4 Il prodotto del numero n, maggiore di 1, per il quadrato del suo precedente è:

A $n^2 \cdot (n - 1)^2$.
B $n \cdot (n - 1)^2$.
C $n^2 \cdot (n - 1)$.
D $n \cdot n - 1^2$.
E $n \cdot n^2 - 1$.

5 Delle seguenti operazioni solo una *non* è eseguibile in $\mathbb{N}$. Quale?

A $(7 - 4) + 5$
B $(7 - 5) - 3$
C $(7 + 5) - 9$
D $9 - (7 - 5)$
E $(9 - 7) + 5$

6 **INVALSI 2013** Se n è un numero naturale, allora il numero $n \cdot (n + 2)$:

A è sempre dispari.
B è sempre pari.
C è dispari se n è pari.
D è dispari se n è dispari.

Calcola il valore delle seguenti espressioni.

7 $\{[(4^3 - 4^2):2 - 3 \cdot 7]:3\}^3 + 3 \cdot 5 - \{[(2^2)^3]^1\}^2 : (4^2 \cdot 4^3)$ [12]

8 $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 : (12^3 : 6^3 + 2)^2 + (1^0 + 2^0 - 3^0 + 4^0 - 5^0)$ [10]

9 $(6^3 \cdot 6^5 \cdot 2^8) : (3^5 \cdot 4^5 : 12^4)^8 + [(7^0)^3]^5 \cdot (3^2 \cdot 2^0 : 3)$ [4]

10 $(8^3 : 4^3 \cdot 2^5) : (2^4)^2 + (4^3 \cdot 2^3)^4 : (4 \cdot 4^3)^3 - 2^2 \cdot (2^5)^2$ [1]

11 $[(36:3^2)^3 : 2^2] \cdot [(36:2^2)^3 : 3] : 144 - 144 : (7^0 + 5^2 - 3^2 - 2^0)$ [18]

12 $\{[(72:8)^7 \cdot (3^2)^3]^2 : [(75:5)^{10} : 25^5]^3\}^2 \cdot (162:9^2) : (9^5)^2$ [2]

13 $\{[17^2 - (15^2 + 8^2)]^4 + 8^4 : 4^5 + (3^4 : 3^2 - 1^2)^2\} : [(2^5 - 5^2)^2 - 8^2 : 2]$ [4]

Traduci le seguenti frasi in simboli e poi calcola il valore delle espressioni ottenute.

14 Somma al doppio del quadrato di 4 il prodotto fra 3 e il suo successivo. [44]

15 Eleva al quadrato la differenza tra il prodotto di 2, 3 e 5 e il cubo di 3. [9]

16 Moltiplica per il successivo di 5 la differenza tra il doppio di 7 e il prodotto fra 3 e 4. [12]

17 Dividi per il cubo di 3 il quadrato della somma tra il quadrato di 5 e 2. [27]

18 Somma al doppio prodotto di a e b la metà di a; $a = 12$, $b = 2$. [54]

Dopo aver determinato MCD e mcm, calcola il valore delle seguenti espressioni.

19 $\{[\text{mcm}(18; 24; 144)] : [\text{MCD}(12; 48; 60)]^2\}^9 - \text{MCD}(3; 5; 44)$ [0]

20 $[\text{MCD}(22; 24; 28)] \cdot [\text{mcm}(2; 8; 32)] : [\text{MCD}(24; 32; 36)]^3$ [1]

21 TEST Nel sistema decimale, il numero $(22)_3$ equivale a:

A 8. B 66. C 30. D 3. E 22.

RISOLVERE PROBLEMI

Problemi INTORNO A NOI

22 Maria decide di regalare per Pasqua ai suoi amici dei sacchettini di dolciumi. Compra quindi 100 ovetti al latte, 120 fondenti e 60 torroncini. Qual è il numero massimo di confezioni uguali che può preparare utilizzando tutti i dolcetti? Quanti dolcetti ci sono in ogni sacchetto? [14]

23 Per accedere a un sito Internet, ti è stata assegnata una password di 8 numeri. Ne ricordi solo i primi 7, e precisamente 2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, ma ricordi che i numeri sono legati fra loro da una relazione matematica. Qual è la cifra che hai dimenticato? (SUGGERIMENTO Ogni numero è uguale al doppio del precedente…) [129]

24 Andrea, Barbara e Carlo si incontrano nella stessa paninoteca ogni volta che pranzano per un rientro pomeridiano a scuola. Andrea ha un rientro ogni 12 giorni, Barbara ogni 8 e Carlo ogni 20 giorni. Se l'ultima volta si sono incontrati tutti e tre il 9 settembre, quando si ritroveranno di nuovo Andrea e Carlo? E quando Barbara e Carlo? Quando invece si rivedranno tutti e tre? [8 novembre; 19 ottobre; 7 gennaio]

25 Martina possiede 405 perline di colore fucsia, 585 azzurro, 1575 blu e 450 giallo. Qual è il numero massimo di braccialetti identici che Martina può confezionare utilizzando tutte le perline che ha a disposizione? [45]

26 Giovanna va dal parrucchiere a fare la tinta ogni 8 settimane, a tagliare i capelli ogni 6 settimane, a fare la permanente ogni 84 giorni. Se oggi va dal parrucchiere a fare taglio, tinta e permanente, tra quanto farà di nuovo i tre trattamenti insieme? [24 settimane]

27 **Gruppi di laboratorio** La 1ª A e la 1ª B sono costituite rispettivamente da 28 e 30 studenti. Il professore di fisica decide di dividere gli studenti di ciascuna classe in gruppi, in modo che in entrambe le classi i gruppi siano formati dallo stesso numero di studenti. Da quanti studenti sarà costituito al massimo ciascun gruppo? Quanti studenti dovrebbero esserci in meno in 1ª A per costituire gruppi di 6 ragazzi ciascuno? [2; 4]

28 Matteo tiene molto all'ordine del desktop del suo computer. Si accorge che se dispone le icone in colonne da 8 ne avanza una, così come se le dispone in colonne da 5 o da 4. Quante icone ha come minimo sul desktop? [41]

29 INVALSI 2011 Un bastoncino viene prima diviso a metà, poi ognuna delle due metà viene divisa di nuovo a metà, e così via. Mostra l'operazione che ti permette di trovare il numero di pezzi dopo 10 suddivisioni.

30 Rebecca vorrebbe comprare delle magliette che costano € 32 l'una. Se ha a disposizione € 136, quante ne riesce a comprare? Con i soldi che le rimangono riesce a comprare 2 paia di calzini uguali. Se in questo modo ha esaurito tutti i soldi a disposizione, quanto ha pagato un paio di calzini? [4 magliette; € 4]

VERIFICA DELLE COMPETENZE PROVE

1 ora

PROVA A

1 VERO O FALSO?

a. Un numero è divisibile per 21 se è divisibile per 3 o per 7. V F

b. I multipli di 8 minori di 50 divisibili per 3 sono tre. V F

c. In una divisione in $\mathbb{N}$, il quoziente è sempre minore o uguale al dividendo. V F

d. Nessun multiplo di 2 è un numero primo. V F

2 Semplifica la seguente espressione: $[(2^2)^2 \cdot 2^4] : (2^3)^2 + (3^3)^2 : [(3^4)^3 : (3^5)^2]^2$.

3 Traduci la seguente frase in espressione e calcolane il valore: «Sottrai al prodotto tra il quadrato di 2 e il quadrato di 3 il rapporto tra 45 e la differenza tra 12 e la sua quarta parte».

4 Determina MCD e mcm dei seguenti gruppi di numeri:

a. 4, 25, 33; **b.** 15, 60, 225.

5 Scrivi in base dieci i numeri $(230)_4$, $(230)_5$, $(230)_8$. Scrivi poi in base 5 il numero che in base dieci è 230.

PROVA B

1 **Pasta in più** Pongo su una bilancia digitale un recipiente che contiene della pasta e leggo 320 g sul display. Poiché all'improvviso arrivano degli amici, aggiungo della pasta in modo da quadruplicarne la quantità e leggo 740 g. Quanto pesa il recipiente?
Risolvi il problema scrivendo un'espressione e semplificandola.

2 **Dati in salvo** Tre amici decidono di configurare il loro computer personale in modo che esegua automaticamente il backup dei dati.
Anna sceglie di salvare i dati ogni settimana, Barbara ogni quattro giorni, Andrea ogni due settimane. Se il primo salvataggio automatico avviene per tutti venerdì 9 agosto, in quale giorno si verificherà di nuovo l'evento? In quale giorno avverrà il primo salvataggio per Andrea e Anna ma non per Barbara?

3 INVALSI 2011 **Cifre coperte** In ciascuna delle seguenti operazioni una delle cifre è coperta.

1. 50■ = **2.** 98 × 8▼ = **3.** 143▲ × 4 = **4.** 3 × 25♦3 =

Rispondi alle domande che seguono mettendo una crocetta per ogni riga.

	1	2	3	4
a. Quale delle operazioni dà il risultato maggiore?	☐	☐	☐	☐
b. Quale delle operazioni dà il risultato minore?	☐	☐	☐	☐
c. Quale delle operazioni dà come risultato un numero dispari?	☐	☐	☐	☐

4 Traduci la seguente frase in simboli e calcola il valore dell'espressione ottenuta.
«Dividi il cubo del quadrato di 2 per la somma tra il quadrato di 3 e 7.»